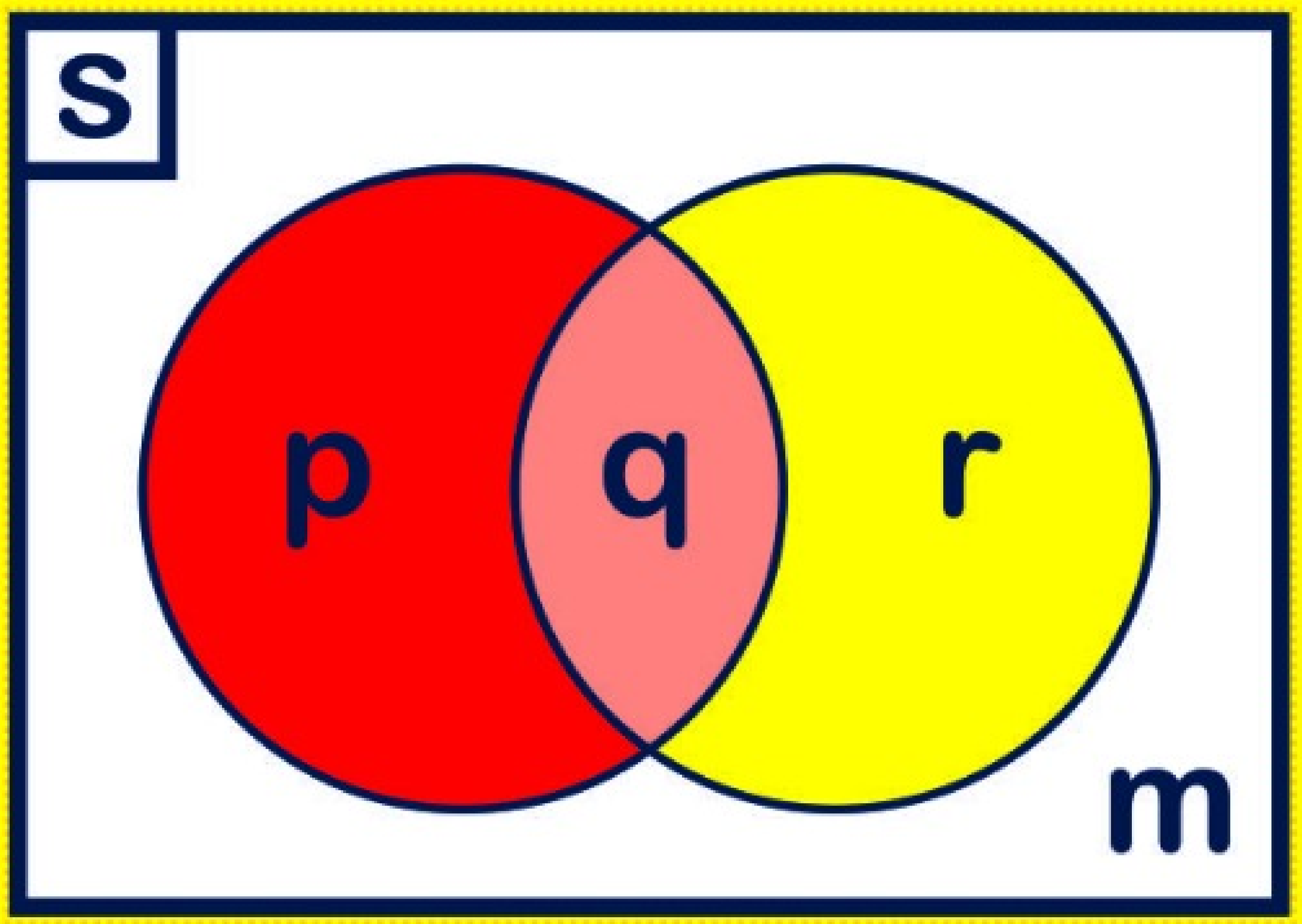
LOGIKA dan HIMPUNAN



Dr. Syamsul Bahri, M.Si.

Program Studi Matematika
FMIPA UNRAM- 2016

KATA PENGANTAR

Mata kuliah Logika dan Himpunan adalah salah satu mata kuliah dasar bagi mahasiswa program studi matematika Universitas Mataram yang disajikan pada semester 1 dengan bobot 2 SKS. Dengan melihat obyek dan bobot dari mata kulian ini, materi-materi yang disajikan dipilih sedemikian hingga mahasiswa yang telah lulus mata kuliah ini memiliki sejumlah kemampuan dasar yang berkaitan dengan logika dalam hal ini mencakup kemampuan berpikir analitis, logis dan aksiomatik serta teknik-teknik pembuktian dan dasar-dasar teori himpunan serta hubungan antara keduanya.

Buku ini dikemas dalam enam bab. Bab I berisi tentang dasar-dasar logika, teknik penarikan kesimpulan. Bab II tentang teknik-teknik pembuktian dalam matematika. Bab III mengupas tentang dasar-dasar teori himpunan. Bab IV berisi uraian tentang hubungan antara logika dan teori himpunan. Bab V dan Bab VI berturut-turut membahas tentang relasi dan fungsi

Mata kuliah ini, sebagaimana kuliah dasar lainnya dirancang dengan tujuan agar mahasiswa yang telah mengikuti mata kuliah ini memiliki kemampuan dasar tentang logika, dan himpunan, sehingga dalam menenpuh mata kuliah lanjutan tidak terlalu mengalami kesulitan, seperti mata kuliah aljabar linier, matematika diskrit, aljabar abstrak, maupun mata kuliah-mata kuliah analisis seperti analisa riil dan analisa kompleks.

Buku ini disajikan dengan bahasa sederhana disertai dengan penggunaan simbol-simbol yang mengantar mahasiswa mempelajari matematika selanjutnya dan pada setiap babnya disediakan beberapa contoh dan soal latihan. Mahasiswa diharapkan mempelajari dengan baik dan cermat setiap metoda dan cara yang dilakukan dalam pemecahan soal-soal pada contoh yang diberikan dan mengerjakan semua latihan yang ada. Semoga berhasil…….

Akhirnya, kami menyampaikan terima kasih kepada FK8PT Universtas Mataram sebagai penyandang dana dalam penulisan buku ini. Kemudian sebagai penyusun kami menyadari kemungkinan adanya kekeliruan atau kesalahan pada buku ini, dengan hati terbuka kami menerima segala kritikan dan saran demi perbaikan buku ini.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
LOGIKA

1.1. Konsep Logika dan Pentingnya Belajar Logika

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita menggunakan pikiran untuk memecahkan berbagai masalah yang ada. Termasuk dalam hal ini adalah membuat suatu keputusan. Sebelum membuat keputusan atau memecahkan suatu permasalahan, terlebih dahulu kita dihadapkan pada permasalahan menarik kesimpulan dari beberapa gagasan atau informasi yang telah ada. Untuk menarik kesimpulan dari berbagai informasi yang ada tersebut diperlukan suatu kemampuan bernalar.

Kemampuan bernalar adalah kemampuan menarik kesimpulan dari sejumlah fakta, informasi, gejala atau bukti-bukti yang telah ada senbelumnya. Dalam menarik kesimpulan tersebut diperlukan suatu "kemampuan" agar proses dan kesimpulan yang diperoleh sahih atau valid. Kaidah-kaidah dalam logika akan mempermudah dan menjamin kesimpulan yang diperoleh sahih (valid) dan juga dapat dipakai untuk menilai atau memeriksa proses penarikan kesimpulan tersebut sahih atau tidak.

Seringkali kita membuat asumsi atau praduga yang salah terhadap sesuatu hal atau orang lain hanya dikarenakan kita salah menginterpretasikan atau menafsirkan suatu pernyataan atau fenomena. Pengetahuan tentang kaidah-kaidah logika yang akan dipelajari dalam bab ini, akan dapat membantu kita dalam menghindari salah interpretasi atau penafsiran dan pada sisi lainnya dapat meningkatkan keahlian dalam berpikir secara analitis dan aksiomatis yang merupakan ciri dalam belajar matematika.

Secara khusus, logika yang akan dipelajari adalah logika simbolik. Beberapa keuntungan belajar logika simbolik antara lain menghindari salah penafsiran yang disebabkan oleh kalimat atau penyataan yang terlalu panjang, mudah melakukan perumuman atau memperpanjang rangkaian penalaran dalam menyelesaikan permasalahan yang lebih kompleks.

Dengan demikian, pengetahuan tentang kaidah-kaidah logika dapat digunakan untuk mengetahui cara penarikan kesimpulan yang sahih atau valid atau menguji / menganalisis kesimpulan yang sudah ada apakah sahih atau tidak.

1.2. Proposisi / Pernyataan

Dalam mengkomunikasikan atau mengungkapkan gagasan-gagasan yang dimiliki, seseorang akan menggunakan kalimat-kalimat dalam bahasa yang dapat dipahami oleh pendengarnya. Perhatikan contoh-contoh kalimat berikut ini .

1. Mataram terletak di Lombok Barat.
2. Raditya adalah anak yang menggemaskan.
3. Unram satu-satunya perguruan tinggi di NTB yang memiliki Program Studi Matematika.
4. Hai, kamu yang bernama Adit?
5. Pergi kamu!
6. Adit seorang pemuda yang gagah.

Dalam bahasa sehari-hari gagasan atau pendapat biasanya dinyatakan dalam kalimat deklaratif /berita dan kalimat yang dapat ditentukan benar atah salah (contoh 1, 2, 3). Kalimat pada contoh satu adalah kalimat benar sedangkan kalimat pada contoh 3 merupakan kalimat yang salah. Kalimat pada contoh 3, bisa benar atau juga bisa salah tergantung fakta yang ada tetapi tidak bisa sekaligus benar dan salah. Kalimat pada contoh 4 dan 5 merupakan contoh kalimat yang tidak dapat ditentukan benar atau salahnya. Contoh 6 merupakan contoh kalimat yang tidak berarti walaupun memiliki struktur kalimat yang benar, hal ini disebabkan karena “pemuda yang gagah” sangat relatif. Relatif dalam arti kita tidak bisa menentukan kebenaran dari kalimat tersebut, sebab ada orang yang mengatakan benar dan mungkin saja ada orang yang akan menyatakan salah. Dalam matematika, kalimat yang digunakan harus bisa ditentukan benar atau salahnya tetapi tidak sekaligus keduanya. Pada umumnya kalimat seperti ini berbentuk kalimat berita atau pernyataan yang disebut dengan **proposisi**.

Definisi 1.1

Proposisi adalah pernyataan yang berbentuk kalimat berita yang memiliki dua kemungkinan nilai kebenaran yaitu benar atau salah tetapi tidak sekaligus benar dan salah.

Benar atau salahnya sebuah proposisi atau pernyataan disebut nilai kebenaran dari penyataan tersebut.

Berdasarkan struktur kalimat, kita mengenal dua bentuk kalimat yaitu kalimat sederhana dan ada kalimat majemuk. Demikian halya dengan proposisi atau pernyataan. Proposisi sederhana, jika pada roposisi tersebut hanya mengandung satu pokok pikiran saja dan tidak mengandung kata hubung atau perangkai kalimat. Sedangkan proposisi majemuk, jika proposisi tersebut memuat lebih dari satu pokok pikiran dalam hal ini merupakan gabungan dari dua/lebih proposisi sederhana atau memuat kata hubung /perangkai kalimat. Nilai kebenaran dari pernyataan majemuk sangat bergantung pada kebenaran dari proposisi-proposisi pembentuknya tanpa melihat keterkaitan isi dari proposisi-proposisi pembentuknya.

Contoh 1.1

Diantara pernyataan berikut manakah yang merupakan proposisi sederhana atau proposisi majemuk.

1. Logika dan himpunan adalah salah satu matakuliah di Program Studi Matematika.
2. Ahmad menyukai motor yang berwarna kuning dan menggunakan kopling.
3. Adit suka makan bakso atau Ridho suka makan mie ayam.
4. Ali tidak suka main bola.
5. Jika Ali naik kelas maka ia akan dibelikan sepeda baru.

Jawab :

1. Contoh 1 merupakan proposisi sederhana karena proposisi ini hanya mengandung satu pokok pikiran dan tidak memuat kata hubung atau perangkai kalimat.
2. Contoh 2 – 5 merupakan proposisi majemuk, karena memuat lebih dari satu pokok pikiran atau memuat tanda hubung kalimat, secara berturut-turut tanda hubung yang dipakai adalah dan, atau, ingkaran (tidak) dan jika …maka… .

Untuk menyederhanakan, dalam logika matematika suatu proposisi biasanya disimbolkan dengan huruf kecil seperti p, q, r, s, t dan seterusnya. Setelah simbol ini diikuti dengan tanda “:” untuk menyatakan maksud dari proposisi tersebut. Contoh, p : Ali mahasiswa Unram, ini berarti p merupakan simbol dari pernyataan Ali mahasiswa Unram. Nilai kebenaran, “benar” dari suatu proposisi dilambangkan dengan “ B ” atau “ 1 ” dan nilai kebenaran “salah” dilambangkan dengan “ S ” atau “ 0 ”.

Latihan

1. Manakah diantara kalimat berikut yang merupakan proposisi?
   a. Pulau Lombok terletak di sebelah Timur Pulau Dewata.
   b. Pulau Lombok adalah pulau kecil.
   c. 2 adalah satu-satunya bilangan prima yang genap.
   d. $1 < -5$
   e. Hati-hati terhadap ancaman sunami dan gempa bumi!
   f. Silakan saudara meninggalkan ruangan ini!
   g. apakah kamu sorang mahasiswa?
   h. Saya seorang jenderal.
   i. Tidak benar bahwa Ali mahasiswa matematika
   j. Ahmad dan Ali gemar bermain badminton.
   k. Apakah Reza atau Tigor yang kamu sayangi?
   l. Ahmad menyukai film dokumenter atau musik klasik.
2. Manakah diantara kalimat berikut yang merupakan proposisi majemuk?
   a. Baik sekolah maupun kantor hari ini libur.
   b. Ariel pergi ke Denpasar atau Ia pulang ke kampung halamannya.
   c. Nelayan melaut, jika bulan belum begitu terang.
   d. Jika perut lapar mata cepat mengantuk
   e. Keadaan sangat mencegangkan, jika kita sedang berada di lokasi kuburan
   f. Amir tidak masuk sekolah hari ini.
   g. $2 + 2 = 4$ jika dan hanya jika angin bertiup kencang
   h. Bagaimanakah proses penyelesaian masalah luapan lumpur LAPINDO dan luapan magma di gunung merapi?

1.3. Perangkai Dasar dan Tabel Kebenaran

Misalkan kita mempunyai dua proposisi, sebut p dan q. Dari dua proposisi ini kita dapat membuat proposisi baru (proposisi majemuk) dengan menghubungkan kedua proposisi tersebut menggunakan kata-kata perangkai (tanda hubung) kalimat. Terdapat lima macam perangkai dasar untuk membentuk proposisi majemuk, yaitu :

1. Ingkaran atau negasi, dengan lambang $\neg$
2. Konjungsi (dan) , dengan lambang $\wedge$
3. Disjungsi (atau), dengan lambang $\vee$
4. Implikasi (jika … maka …..), dengan lambang $\rightarrow$
5. Bi-implikasi (… jika dan hanya jika …), dengan lambang $\leftrightarrow$

1.3.1. Ingkaran atau Negasi

Definisi 1.2

Misalkan p adalah suatu proposisi sebarang. Ingkaran atau negasi dari p adalah suatu proposisi yang bernilai salah, jika proposisi p bernilai benar dan sebaliknya bernilai benar, jika p bernilai salah.

Catatan : Ingkaran dari p dinotasikan dengan $\neg p$ (dibaca : tidak benar bahwa p atau negasi dari p)

Contoh 1.2

1. Jika p : Mataram terletak di Pulau Lombok (B),
   Maka $\neg p$: Tidak benar bahwa Mataram terletak di Pulau Lombok (S), atau
   $\neg p$: Mataram tidak terletak di Pulau Lombok (S).
2. Jika q : $2 \geq 5$ (S).
   Maka $\neg q$: Tidak benar bahwa $2 \geq 5$ (B), atau
   $\neg q$: $2 < 5$ (B)
3. Jika r : Adit adalah seorang mahasiswa berkacamata
   Maka $\neg r$: Tidak benar bahwa Adit adalah seorang mahasiswa berkacamata, atau
   $\neg r$: Adit adalah seorang mahasiswa yang tidak berkacamata

Jika Adit adalah seorang mahasiswa yang memakai kacamata, maka $\neg\, r$ bernilai salah dan sebaliknya.

4. Jika s : Semua semut lebih kecil dari gajah (B)

   Maka $\neg\, s$: Tidak benar bahwa semua semut lebih kecil dari gajah (S).

   Catatan : Semua semut lebih besar dari gajah, bukan merupakan $\neg\, s$ tetapi beberapa/ada semut lebih besar dari gajah merupakan $\neg\, s$. Kenapa?

5. Jika t : Ada mahasiswa yang senang belajar matematika

   Maka $\neg\, t$: Tidak benar bahwa Ada mahasiswa yang senang belajar matematika

   Catatan : "Ada mahasiswa yang tidak senang belajar matematika", bukan $\neg\, t$ tetapi "semua mahasiswa tidak senang belajar matematika" merupakan $\neg$ t. Kenapa?

Menyatakan ingkaran dari suatu proposisi dapat dilakukan dengan menambahkan kalimat "tidak benar bahwa" di depan proposisi aslinya atau dengan menambahkan kata "tidak" didalam proposisi awal, tetapi untuk pernyataan tertentu penambahan kata 'tidak" tersebut bukan merupakan ingkaran dari proposisi semula (contoh 4 dan 5 di atas).

Berdasarkan definisi ingkaran atau negasi di atas, kemungkinan nilai kebenaran untuk suatu proposisi dengan ingkarannya adalah sebagai berikut.

P	$\neg\, p$
B	S
S	B

Tabel seperti di atas disebut sebagai **tabel kebenaran**. Tabel ini menyatakan nilai kebenaran untuk suatu proposisi majemuk tertentu setiap kemungkinan kombinasi nilai kebenaran dari proposisi-proposisi pembentuknya. Pikirkan berapa banyak kombinasi nilai kebenaran jika proposisi majemuknya disusun dari 2 proposisi sederhana, 3 proposisi sederhana dan seterusnya sampai n proposisi sederhana.

1.3.1. Konjungsi (dan)

Perhatikan proposisi : " Aku suka belajar dan merenung". Proposisi ini berasal dari dua proposisi sederhana yaitu (i) "aku suka belajar" dan (ii)"aku suka merenung". Kebenaran dari proposisi majemuk, sangat bergantung pada kebenaran proposisi-proposisi pembentuknya. Jika proposisi (i) dan (ii) benar maka proposisi majemuknya juga benar. Tetapi, jika minimal salah satu dari kedua proposisi (i) atau (ii) salah maka proposisi majemuknya juga salah. Sebaliknya, jika proposisi majemuknya benar maka kedua proposisi pembentuknya juga benar.

Definisi 1.3

Misalkan p dan q dua buah proposisi. Proposisi p dan q atau konjungsi p dan q, dinotasikan $p \wedge q$ adalah proposisi majemuk yang bernilai benar, jika kedua proposisi pembentuknya bernilai benar dan bernilai salah jika minimal salah satu proposisinya bernilai salah.

Berdasarkan definisi di atas, tabel kebenaran untuk proposisi konjungsi adalah sebagai berikut.

p	Q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Catatan : Dalam bahasa sehari-hari, perangkai konjungsi tidak hanya diungkapkan dengan kata hubung "dan" tetapi juga sering menggunakan kata hubung yang semakna dengan "dan" seperti "tetapi", "walaupun", "meskipun", "sedangkan", "namun" dan sebagainya.

Contoh 1.3

1. Anak itu pintar tetapi Ia sombong.
2. Walaupun badannya besar, Ahmad tidak bertenaga.

Proprosisi pertama, merupakan proposisi majemuk yang dibentuk oleh dua proposisi sederhana yaitu Anak itu pintar dan Anak itu sombong. Pernyataan ini bernilai benar, jika anak itu pintar (B) dan Anak itu sombong (B). Demikian halnya dengan proposisi kedua, dibentuk oleh dua proposisi, yaitu Ahmad badannya besar dan Ahmad tidak bertenaga. Proposisi ini bernilai benar, jika Ahmad badannya besar (B) dan Ahmad tidak bertenaga (B).

Bagian yang sering menjadi masalah bagi mahasiswa adalah proses simbolisasi dari masalah ke dalam formulasi logika simbolik. Salah satu cara yang mungkin dapat membantu adalah memecahkan proposisi yang kompleks ke dalam proposisi-proposisi sederhana kemudian lakukan pencatatan berdasarkan proposisi-proposisi sederhana tersebut.

Contoh 1.4

Simbolkan proposisi berikut dan tentukan nilai kebenarannya, "Meskipun hari sedang hujan, Ahmad tetap saja latihan".

Jawab :

Proposisi tersebut terdiri atas dua proposisi sederhana, yaitu (i) p : Hari sedang hujan dan (ii) q : Ahmad tetap latihan. Lambang untuk proposisi yang diberikan adalah $p \wedge q$. Nilai kebenaran dari proposisi ini bergantung pada hasil observasi. Jika kenyataannya hari sedang hujan dan Ahmad tetap latihan benar maka proposisi $p \wedge q$ bernilai benar, dan proposisi $p \wedge q$ bernilai salah, jika minimal salah satu dari proposisi p atau q bernilai salah.

Contoh 1.5

Tentukan nilai kebenaran dari proposisi-proposisi berikut :

1. $3 \geq 2$ dan 2 bilangan genap
2. $3 < 2$ dan 2 bilangan genap
3. $3 + 1 = 4$ dan 2 bilangan ganjil
4. 5 bilangan komposit dan $2 \times 5 = 7$.

Jawab :

1. Benar, karena kedua proposisi pembentuknya bernilai benar
2. Salah, karena 3 tidak lebih kecil dari 2.
3. Salah, karena 2 bukan bilangan ganjil
4. Salah, karena 5 bukan bilangan komposit dan $2 \times 5 \neq 7$

1.3.2. Disjungsi (atau)

Perhatikan proposisi : " Aku suka belajar atau menyanyi". Proposisi ini berasal dari dua proposisi sederhana yaitu (i) "aku suka belajar" dan (ii)"aku suka menyanyi". Kebenaran dari proposisi majemuk semula sangat bergantung pada kebenaran proposisi-proposisi pembentuknya. Jika minimal salah satu proposisi (i) atau (ii) benar maka proposisi majemuknya juga benar. Proposisi majemuk tersebut bernilai salah hanya jika kedua proposisi pembentuknya bernilai salah.

Definisi 1.4

Misalkan p dan q dua buah proposisi. Proposisi p atau q atau disjungsi p dan q, dinotasikan $p \vee q$ adalah proposisi majemuk yang bernilai benar, jika minimal salah satu proposisi pembentuknya bernilai benar dan bernilai salah jika kedua proposisi pembentuknya bernilai salah.

Berdasarkan definisi di atas, tabel kebenaran untuk proposisi disjungsi adalah sebagai berikut.

p	Q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Catatan : Dalam bahasa sehari-hari, disjungsi adalah kalimat atau proposisi yang berisi pilihan.

Contoh 1.6

1. Anak itu pintar atau saya yang bodoh.
2. Ali berbadan besar atau Ia berambut keriting.

Proprosisi pertama, merupakan proposisi majemuk yang dibentuk oleh dua proposisi sederhana yaitu Anak itu pintar dan saya bodoh. Pernyataan ini bernilai benar, jika pada kenyataannya setidaknya satu diantara kedua kalimat, "anak itu pintar" atau "saya bodoh". Demikian halnya dengan proposisi kedua, dibentuk oleh dua proposisi, yaitu Ahmad badannya besar dan Ahmad berambut keriting. Proposisi ini bernilai benar, jika minimal salah satu dari proposisi "Ahmad berbadan besar" atau "Ahmad tidak bertenaga" bernilai benar.

Contoh 1.7

Simbolkan proposisi berikut dan tentukan nilai kebenarannya, "8 habis dibagi 4 atau ahmad seorang mahasiswa ".

Jawab :

Proposisi tersebut terdiri atas dua proposisi sederhana, yaitu (i) p : 8 habis dibagi 4 dan (ii) q : Ahmad seorang mahasiswa. Lambang untuk proposisi yang diberikan adalah $p \vee q$. Nilai kebenaran dari proposisi "8 habis dibagi 4 atau ahmad seorang mahasiswa " adalah benar. Karena 8 habis dibagi 4 maka proposisi majemuk tersebut bernilai benar, tidak tergantung pada kenyataan apakah Ahmad seorang mahasiswa atau bukan.

Contoh 1.8

Tentukan nilai kebenaran dari proposisi-proposisi berikut :

1. $3 \geq 2$ atau 2 bilangan genap
2. $3 < 2$ atau 2 bilangan genap
3. $3 + 1 = 4$ atau 2 bilangan ganjil
4. 5 bilangan komposit atau $2 \times 5 = 7$.

Jawab :

1. Benar, karena kedua proposisi pembentuknya bernilai benar

2. Benar, karena 2 bilangan genap
3. Benar karena $3 + 1 = 4$ adalah benar
4. Salah, karena 5 bukan bilangan komposit dan $2 \times 5 \neq 7$

1.3.3. Implikasi (jika … maka …)

Proposisi "jika p maka q" dinotasikan $p \to q$ disebut juga dengan proposisi bersyarat (kondisional), dalam hal ini q terjadi dengan syarat p terjadi. Proposisi $p \to q$, selain dibaca "jika p maka q", juga dapat dibaca dengan beberapa cara berikut :

- p berimplikasi q
- q, jika p
- p hanya jika q
- p syarat cukup bagi q
- q syarat perlu bagi p

Proposisi p dalam implikasi di atas disebut dengan <u>premis atau hipotesa atau anteseden</u> sedangkan proposisi q disebut sebagai <u>kesimpulan atau konklusi atau konsekuen</u>.

Catatan :

- p syarat cukup bagi q, artinya jika p terjadi akan berakibat q juga terjadi, tetapi untuk terjadinya q tidak harus p juga terjadi.
- q syarat perlu bagi p, artinya jika q tidak terjadi akan berakibat p juga tidak terjadi dengan kata lain terjadinya q mutlak diperlukan untuk terjadinya p.

Dalam bahasa sehari-hari bentuk "jika p maka q" sering digunakan dan biasanya disertai dengan hubungan sebab akibat antara anteseden dan konsekuen. Namun dalam logika matematika hubungan sebab akibat ini tidak begitu penting untuk diperhatikan karena kebenaran dari proposisi implikasi hanya ditentukan oleh nilai kebenaran dari proposisi pembentuknya, dalam hal ini proposisi p dan q. Implikasi merupakan bentuk proposisi yang paling sering akan dijumpai dalam belajar matematika, sebab banyak hukum dalam matematika baik teorema, lemma maupun akibat muncul dalam bentuk proposisi seperti ini.

Definisi 1.5

Misalkan p dan q dua buah proposisi. Proposisi jika p maka q atau p berimplikasi q adalah proposisi majemuk yang bernilai salah, jika proposisi p bernilai benar dan proposisi q bernilai salah.

Berdasarkan definisi di atas, tabel kebenaran untuk implikasi adalah sebagai berikut.

p	Q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Perhatikan tabel di atas, bentuk implikasi akan selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari konsekuen, jika anteseden bernilai salah.

Contoh 1.9

Tentukan nilai kebenaran dari masing-masing proposisi berikut:

1. Jika hari hujan maka jalan licin
2. Jika Andi rajin belajar maka Ia akan mendapat nilai yang bagus.
3. Jika segitiga ABC sama sisi maka segitiga ABC sama kaki
4. Jika Adit suka makan bakso maka $2 + 3 \leq 6$.
5. Jika $1 < 2$ maka $x^2 - 1 = 0$ tidak mempunyai solusi

Kebenaran dari contoh-contoh di atas sangat bergantung pada nilai kebenaran dari masing-masing proposisi pembentuknya. Contoh 1, bernilai benar asalkan hari hujan berakibat jalan licin, tetapi akan bernilai salah jika hujan terjadi tetapi jalan tidak licin. Contoh 2, bernilai benar jika Andi rajin belajar dan Andi mendapat nilai yang bagus <u>atau</u> Andi tidak rajin belajar dan apapun nilai yang diperoleh Andi, baik nilai bagus ataupun nilai jelek. Demikian halnya dengan contoh 3. Contoh 1, 2 dan 3 merupakan bentuk implikasi yang memiliki hubungan sebab akibat antara anteseden dan konsekuennya. Berbeda dengan contoh 4 dan 5, tidak ada hubungan sebab akibat antara anteseden dan konsekuennya. Berdasarkan tabel kebenaran untuk implikasi di atas, nilai kebenaran pada contoh 4 akan bernilai benar hanya jika nilai kebenaran dari "Adit suka makan bakso" adalah benar sebab proposisi "$2 + 3 \leq 6$" bernilai benar. Sedangkan contoh 5 bernilai salah, sebab antesedennya benar dan konsekuennya bernilai salah.

Pernyataan bersyarat "jika p maka q" memiliki beberapa variasi seperti yang diberikan pada definisi berikut ini.

Definisi 1.6

Misalkan proposisi bersyarat "jika p maka q" diberikan, maka proposisi

1. $q \rightarrow p$ disebut konvers dari $p \rightarrow q$.
2. $\neg p \rightarrow \neg q$ disebut invers dari $p \rightarrow q$.
3. $\neg q \rightarrow \neg$ p disebut kontrapositif dari $p \rightarrow q$.

Contoh 1.10

Misalkan diberikan proposisi bersyarat " jika segitiga ABC sama sisi maka segitiga ABC sama kaki". Tentukan konvers, invers dan kontraposif dari proposisi bersyarat tsb.

Jawab :

1. Konvers : jika segitiga ABC sama kaki maka segitiga ABC sama sisi.
2. Invers : jika segitiga ABC tidak sama sisi maka segitiga ABC tidak sama kaki
3. Kontrapositif : jika segitiga ABC tidak sama kaki maka segitiga ABC tidak sama sisi.

Catatan : Tentukan nilai kebenaran dari konvers, invers dan kontarpositif dengan menggunakan tabel kebenaran kemudian bandingkan dengan nilai kebenaran pada bentuk impilkasi !

1.3.4. Bi-implikasi (… jika dan hanya jika …)

Proposisi " p jika dan hanya jika q" disingkat menjadi "p jhj q" dinotasikan dengan $p \leftrightarrow q$ disebut juga **proposisi dwisyarat** atau **bikondisional**. Proposisi $p \leftrightarrow q$, selain dibaca "p jhj q", juga dapat dibaca dengan " p syarat cukup dan perlu bagi q"

Dalam bahasa sehari-hari bentuk "p jhj q" sangat jarang digunakan tetapi dalam belajar matematika sering dijumpai dalam bentuk hukum matematika baik teorema, lemma maupun akibat.

Definisi 1.7

Misalkan p dan q dua buah proposisi. Proposisi "p jhj q" adalah proposisi majemuk yang bernilai benar hanya jika proposisi p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama.

Berdasarkan definisi di atas, tabel kebenaran untuk bi-implikasi adalah sebagai berikut.

p	Q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 1.11

Tentukan nilai kebenaran dari masing-masing proposisi berikut :

1. p : "Hari hujan jika hanya jika petir berbunyi". Nilai kebenarannya tergantung fakta yang ada, proposisi p bernilai benar, jika hari hujan dan petir berbunyi; atau hari tidak hujan dan petir juga tidak berbunyi.
2. q : "Andi rajin belajar jika dan hanya jika Ia belum punya pacar". Nilai kebenarannya tergantung fakta yang ada, proposisi q bernilai benar, jika Andi rajin

belajar dan Ia belum punya pacar; atau jika Andi tidak rajin belajar dan Ia sudah punya pacar

3. *r* : "Segitiga ABC sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya kongruen". Proposisi ini benar, kenapa?
4. *s* : "Adit rajin belajar jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat x sehingga $2 + x = 0$". Nilai kebenarannya tergantung pada proposisi "Adit rajin belajar", karena proposisi "terdapat bilangan bulat x sehingga $2 + x = 0$" adalah bernilai benar. Jika kenyataannya Adit rajin belar maka proposisi *s* bernilai benar dan sebaliknya.
5. $1 < 2$ jika dan hanya jika $x^2 - 1 = 0$ tidak mempunyai solusi. Proposisi ini bernilai salah, sebab "$1 < 2$" adalah benar tetapi "$x^2 - 1 = 0$ tidak mempunyai solusi" adalah salah.
6. $2 > 5$ jika dan hanya jika garam rasanya manis. Silakan anda yang menentukan nilai kebenarannya!

Contoh 1.12

Lambangkan proposisi berikut dan tentukan nilai kebenarannya

" 4 bukan bilangan komposit dan $x^2 + 1 = 0$ tidak punya solusi jika dan hanya jika jumlah ukuran sudut segitiga adalah 180^0 ".

Jawab :

Misalkan

p : 4 adalah bilangan komposit ;

$\neg p$: 4 bukan bilangan komposit ;

q : $x^2 + 1 = 0$ tidak punya solusi, dan

r : jumlah ukuran sudut segitiga adalah 180^0.

Sehingga lambang dari proposisi di atas adalah $(\neg p \wedge q) \leftrightarrow r$ dan nilai kebenarannya adalah salah.

Latihan

1. Tulikan negasi dari masing-masing proposisi berikut!
   a. Warna baju Amir hitam.
   b. $2 \geq 3$
   c. Harga beras turun.
   d. Semua polwan adalah wanita.
   e. Beberapa MC (*master of ceremony*) adalah laki-laki.
2. Misalkan p = Segitiga ABC adalah sama sisi; q = setiga ABC adalah siku-siku dan r = segitiga ABC adalah sama kaki.
   a. Apakah q negasi dari p?
   b. Apakah r negasi dari p?
   c. Jika kedua jawaban pertanyaan a) dan b) tidak, Apakah negasi dari p?
3. Tentukan negasi dan nilai kebenarannya untuk masing-masing proposisi berikut ini.
   a. $2 < 4$
   b. Semua manusia tidak ada yang kekal
   c. Beberapa anjing dapat mengerti ucapan manusia.
   d. *Whiteboard* berwarna putih.
   e. Ada mahasiswa matematika yang memakai kacamata.
4. Nyatakan proposisi-proposisi berikut ke dalam lamvbang-lambang logika dan tentukan nilai kebenarannya, jelaskan!
   a. Ahmad memakai baju berwarna merah atau kuning.
   b. Syarat perlu dan cukup dua buah segitiga kongruen adalah bentuk dan ukurannya sama
   c. Syarat perlu untuk bisa menjadi mahasiswa program studi matematika adalah mengikuti ujian masuk dan membayar SPP
   d. Jika hujan turun maka jalan licin
   e. 2 adalah bilangan prima jika dan hanya jika $4 > 3$
   f. Bukan Amir yang mahasiswa matematika tetapi Aminah.
   g. 12 habis dibagi 3, jika Ahmad anak pak Camat.

5. Misalkan p : Adit mahasiswa teladan dan q : Dita mahasiswi berprestasi. Nyatakan proposisi berikut dalam kalimat yang sederhana.
   a. $p \to \neg q$
   b. $\neg q \wedge$ p
   c. $\neg (p \wedge q)$
   d. $\neg (p \vee q)$
   e. $\neg (\neg p \vee q)$
6. Misal diberikan proposisi
   r : 9 dibagi 4 bersisa 1
   s : 2 satu-satunya bilangan prima yang genap
   t : $5 + 1 > 8$
   Tentukan nilai kebenaran dari masing-masing proposisi berikut ini.
   a. $s \vee t$
   b. $\neg r \wedge s$
   c. $\neg (s \vee t) \to r$
   d. $(s \leftrightarrow t) \to \neg r$
   e. $(r \wedge s) \vee (\neg t \vee r) \leftrightarrow (t \to s)$
7. Perhatikan hukum berikut : " suatu bilangan habis dibagi 9, jika jumlah digit dari bilangan tersebut habis dibagi 9". Nyatakan hukum tersebut dengan menggunakan istilah
   a. syarat cukup
   b. syarat perlu
   c. hanya jika
8. Misalkan $a \in \mathbb{Z}$. Jika $a > 5$ maka $a - 1 \geq 3$. Apakah syarat cukup juga merupakan syarat perlu? Apakah syarat perlu juga merupakan syarat cukup? jelaskan!
9. Perhatikan proposisi berikut : " jika segitiga ABC sama sisi maka segitiga ABC sama kaki". Tentukanlah invers, konvers dan kontraposisi dari proposisi tersebut.
10. Misalkan p suatu proposisi sedemikian hingga untuk setiap kemungkinan dari proposisi q berlaku
    (i) $p \vee q$ bernilai benar

(ii) $p \wedge q$ bernilai salah

Tentukan nilai kebenaran dari proposisi p untuk setiap kasus di atas.

11. Jika proposisi $p \rightarrow q$ bernilai benar maka tentukan nilai kebenaran untuk $\neg (p \vee q)$.
12. Lengkapi tabel berikut, jika operasi Δ didefinisikan sebagai berikut:

p	q	$p \Delta q$	$q \Delta p$	$\neg p \Delta q$	$p \Delta p$
B	B	S			
B	S	B			
S	B	S			
S	S	B			

1.4. Tautologi, Kontaradiksi dan Ekvalen (Ekivalen Logis)

Perhatikan beberapa proposisi berikut:

a. $p \vee \neg p$

b. $p \wedge \neg p$

c. $p \vee q$

Tabel kebenaran untuk masing-masing proposisi di atas berdasarkan nilai kebenaran untuk setiap kemungkinan nilai kebenaran dari proposisi pembentuknya adalah sebagai berikut.

(a)

p	$\neg p$	$P \vee \neg p$
B	S	B
S	B	B

(b)

p	$\neg p$	$P \wedge \neg p$
B	S	S
S	B	S

(c)

p	q	$P \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Perhatikan nilai kebenarannya masing–masing proposisi untuk semua kemungkinan nilai kebenaran proposisi pembentuknya

Berdasarkan contoh di atas, terlihat bahwa :

kasus a, bernilai **benar** untuk semua kemungkinan nilai kebenaran proposisi pembentuknya.

kasus b, bernilai **salah** untuk semua kemungkinan nilai kebenaran proposisi pembentuknya.

kasus c, Nilai kebenarannya tidak semua sama untuk semua kemungkinan yang ada.

Definisi 1.8

Berdasarkan nilai kebenaran suatu proposisi majemuk, maka dapat dibedakan dalam tiga kategori hal berikut:

1. **Tautologi**, adalah suatu proposisi majemuk yang selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan kombinasi nilai kebenaran dari proposisi-proposisi pembentuknya.
2. **Kontradiksi,** adalah suatu proposisi majemuk yang selalu bernilai salah untuk semua kemungkinan kombinasi nilai kebenaran dari proposisi-proposisi pembentuknya.
3. **Kontigensi**, adalah suatu proposisi majemuk yang bukan termasuk tautologi dan bukan juga kontradiksi.

Berdasarkan definisi ini, kalau kita perhatikan kembali contoh dimuka, contoh a) merupakan tautologi, contoh b) merupakan kontradiksi dan contoh c) merupakan kontigensi.

Contoh 1.13

Tentukan kebenaran dari proposisi $((p \wedge q) \vee r) \vee (\neg (p \wedge r))$ dengan menggunakan tabel kebenaran, jika nilai kebenaran dari p adalah benar (B).

Jawab:

Pada proposisi di atas terdapat 3 variabel, dengan nilai kebenaran p saja yang diketahui sementara proposisi q dan r belum diketahui, dengan demikian tabel kebenarannya ada

4 kemungkinan nilai kebenaran (2^2 = 4 baris). Tabel kebenaran untuk proposisi tersebut adalah sebagai berikut:

p	q	r	((	p	$\wedge$	q	)	$\vee$	r	)	$\vee$	(	$\neg$	(	p	$\wedge$	r	))
B	B	B		B	B	B		B	B		**B**		S		B	B	B	
B	B	S		B	B	B		B	S		**B**		B		B	S	S	
B	S	B		B	S	S		B	B		**B**		S		B	B	B	
B	S	S		B	S	S		S	S		**B**		B		B	S	S	

Berdasarkan tabel kebenaran di atas, maka proposisi $((p \wedge q) \vee r) \vee (\neg (p \wedge r))$ mempunyai nilai kebenaran benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran proposisi pembentuknya, dalam hal ini kita sebut dengan **tautologi**.

Contoh 1.14

Dengan menggunakan tabel kebenaran, periksa apakah proposisi berikut termasuk tautologi, kontradiksi atau kontigensi :

$$((p \rightarrow q) \vee r) \leftrightarrow (\neg (p \wedge r))$$

Jawab :

Proposisi di atas dibentuk oleh 3 proposisi dasar, maka tabel kebenarannya terdiri atas 2^3 = 8 baris.

p	q	r	((	p	$\rightarrow$	q	)	$\vee$	r	)	$\leftrightarrow$	(	$\neg$	(	p	$\wedge$	r	))
B	B	B		B	B	B		B	B		**S**		S		B	B	B	
B	B	S		B	B	B		B	S		**B**		B		B	S	S	
B	S	B		B	S	S		B	B		**S**		S		B	B	B	
B	S	S		B	S	S		S	S		**S**		B		B	S	S	
S	B	B		S	B	B		B	B		**B**		B		S	S	B	
S	B	S		S	B	B		B	S		**B**		B		S	S	S	
S	S	B		S	B	S		B	B		**B**		B		S	S	B	
S	S	S		S	B	S		B	S		**B**		B		S	S	S	

Berdasarkan definisi di atas, proposisi $((p \rightarrow q) \vee r) \leftrightarrow (\neg (p \wedge r))$ termasuk dalam kategori kontigensi.

Seringkali kita memiliki dua pernyataan yang seakan-akan berbeda tetapi keduanya memiliki nilai kebenaran yang sama untuk setiap proposisi pembentuknya. Sebagi contoh, proposisi " jika hari hujan maka jalan licin" dan proposisi " hari tidak hujan atau jalan licin" (cobalah cek dengan tabel kebenaran). Kedua proposisi yang memiliki sifat seperti itu disebut ekivalen.

Definisi 1.9

Dua buah proposisi dikatakan **ekivalen (ekivelen secara logis)**, jika kedua proposisi tersebut memiliki nilai kebenaran yang sama. Proposisi p dan q ekivalen dinotasikan dengan $p \cong q$ atau sering disederhanakan menjadi $p = q$.

Definisi ekivalen di atas, dapat juga dirumuskan sebagai berikut :

Proposisi p dan q ekivalen jika dan hanya jika $p \leftrightarrow q$ merupakan suatu tautologi.

Contoh 1.15

Buktikan dengan tabel kebenaran bahwa proposisi " $p \to q$ " ekivalen dengan " $\neg q \to \neg p$" .

Jawab:

p	q	p	$\to$	q		$\neg q$	$\to$	$\neg p$		$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
B	B	B	**B**	B		S	**B**	S		**B**
B	S	B	**S**	S		B	**S**	S		**B**
S	B	S	**B**	B		S	**B**	B		**B**
S	S	S	**B**	S		B	**B**	B		**B**
			*				**			***

Perhatikan nilai kebenaran pada kolom tanda * dan **, kedua kolom tersebut memiliki nilai kebenaran yang **sama** untuk setiap kemungkinan yang ada atau nilai kebenaran pada kolom *** merupakan suatu taotologi. Dengan demikian, terbukti bahwa

$$(p \to q) \cong (\neg q \to \neg p).$$

Latihan

1. Sederhanakan proposisi-proposisi berikut ini sehingga hanya memuat satu perangkai logika.
   a. $\neg (p \vee \neg q)$
   b. $\neg (\neg p \rightarrow \neg q)$
   c. $\neg (p \wedge \neg q)$
2. Diantara proposisi-proposisi berikut, manakah yang merupakan tautologi, kontradiksi atau kontigensi?
   a. $p \rightarrow (p \vee q)$
   b. $p \rightarrow (p \wedge q)$
   c. $(p \wedge q) \rightarrow p$
   d. $(p \vee q) \rightarrow p$
   e. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
   f. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
3. Buktikan masing-masing proposisi berikut ini.
   a. $\neg (p \rightarrow q) \cong p \wedge \neg q$
   b. $\neg (p \wedge q) \cong \neg p \vee \neg q$
   c. $\neg (p \vee q) \cong \neg p \wedge \neg q$
   d. $(p \vee q) \vee r \cong p \vee (q \vee r)$
   e. $p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   f. $p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Dengan menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan bahwa :
   a. $p \wedge (q \vee r) \ncong (p \wedge q) \vee r$
   b. $p \rightarrow (q \vee r) \ncong (p \rightarrow q) \vee r$
   c. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \ncong (p \rightarrow q) \rightarrow r$

1.5. Kesetaraan Dua Proposisi

Dua buah proposisi p dan q dikatakan setara secara logik jika $p \cong q$ atau $p = q$. Untuk memeriksa kesetaraan dua buah proposisi dapat digunakan tabel kebenaran atau dengan menggunakan dalil-dalil kesetaraan di bawah ini.

Catatan : t menyatakan proposisi tautologi dan k menyatakan proposisi kontradiksi.

1. Dalil Keidentikan
   a. $p \vee k = p$
   b. $p \vee t = t$
   c. $p \wedge k = k$
   d. $p \wedge t = p$
2. Dalil Kesamakuatan
   a. $p \vee p = p$
   b. $p \wedge p = p$
3. Dalil Komplemen
   a. $p \vee \neg p = t$
   b. $p \wedge \neg p = k$
4. Dalil Komutatif
   a. $p \vee q = q \vee p$
   b. $p \wedge q = q \wedge p$
5. Dalil Assosiatif
   a. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
   b. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
6. Dalil Distributif
   a. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   b. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
7. Dalil Ingkaran Ganda : $\neg(\neg p) = p$
8. Dalil D'Morgan
   a. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
   b. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

9. Dalil Penghapusan
   a. $(p \vee q) \wedge p = p$
   b. $(p \wedge q) \vee q = q$

Pembuktian terhadap dalil-dalil di atas dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran. Dalil lain (dalil tambahan) yang sering digunakan dalam pembuktian kesetaraan logik adalah:

a. $p \rightarrow q = \neg p \vee q$
b. $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Dengan menggunakan dalil D'Morgan dapat ditunjukkan bahwa $\neg (p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$.

Contoh 1.16

Dengan menggunakan dalil kesetaraan, tunjukkan :

a. $(p \vee q) \wedge \neg p = \neg p \wedge q$
b. $\neg (p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = \neg (p \vee q)$
c. $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p = t$

Jawab :

a. $(p \vee q) \wedge \neg p = (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)$ (dalil distributif)
$= k \vee (q \wedge \neg p)$ (dalil komplemen)
$= \neg p \wedge q$ (dalil komutatif)

b. $\neg (p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (dalil D'Morgan)
$= ((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q)$
(dalil distributif)
$= \neg p \wedge \neg q$ (dalil penghapusan)
$= \neg (p \vee q)$ (dalil D'Morgan)

c. $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p = \neg ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$ (dalil tambahan)
$= (\neg (\neg p \vee q) \vee \neg (\neg q)) \vee \neg p$ (dalil D'Morgan)

$= ((p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p$ (dalil D'morgan + dalil ingkaran ganda)

$= ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$ (dalil distributif)

$= ((p \vee q) \wedge t) \vee \neg p$ (dalil komplemen)

$= (p \vee q) \vee \neg p$ (dalil keidentikan)

$= q \vee (p \vee \neg p)$ (dalil komutatif + assosiatif)

$= q \vee t$ (dalil komplemen)

$= t$ (dalil keidentikan)

Latihan

1. Dengan menggunakan tabel kebenaran, tunjukkan kesetaraan proposisi-proposisi berikut ini. <u>Catatan</u> : t : tautologi, k : kontradiksi dan p, q, r proposisi sebarang.
   a. $p \vee k = p$
   b. $p \vee t = t$
   c. $p \wedge k = k$
   d. $p \wedge t = p$
   e. $p \vee \neg p = t$
   f. $p \wedge q = q \wedge p$
2. Dengan menggunakan dalil kesetaraan, buktikan proposisi majemuk beriku t adalah tautologi.
   a. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
   b. $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
   c. $[(p \to q) \wedge (r \to \neg q)] \to (\neg p \vee \neg r)$
   d. $[p \wedge (q \vee r) \wedge (s \vee t)] \to (\neg t \to s)$
3. Dengan menggunakan dalil kesetaraan, buktikan proposisi majemuk beriku t adalah tautologi
   a. $p \to (p \vee q)$ aturan penambahan
   b. $q \to (p \vee q)$ aturan penambahan
   c. $(p \wedge q) \to p$ aturan penyederhanaan
   d. $(p \wedge q) \to q$ aturan penyederhanaan
   e. $[(p \vee q) \wedge \neg q] \to p$ silogisme disjungtif
   f. $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee s)$ dilema konstruktif
   g. $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \to (\neg p \vee \neg r)$ dilema destruktif

1.6. Kuatifikasi atau Logika Predikat

1.6.1. Predikat atau Fungsi Pernyataan

Seringkali kita dihadapkan dengan permasalahan memeriksa proposisi yang berkaitan dengan suatu kumpulan obyek atau benda. Misalkan kita diberikan proposisi "setiap bilangan bulat yang habis dibagi oleh 2 dan 3, bilangan itu habis dibagi 6" atau proposisi "ada enam ekor ikan yang berwarna merah".

Pada kedua contoh proposisi di atas terkandung suatu pernyataan dengan kumpulan bilangan bulat untuk contoh pertama dan kumpulan ikan untuk contoh kedua. Untuk memeriksa kebenaran proposisi seperti ini akan dikenalkan beberapa konsep seperti predikat, semesta dan suku pengkuantifikasi. Untuk kejelasan makna masing-masing konsep predikat, semesta dan suku pengkuantifikasi perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.17

Mahasiswa matematika diwajibkan memakai sepatu berwarna kuning. Jika didefinisikan A adalah himpunan mahasiswa matematika, maka dapat dibentuk suatu proposisi

x diwajibkan memakai sepatu berwarna kuning.

Proposisi di atas disebut predikat, A sebagai semesta dan x sebagai peubah.

Kebenaran suatu predikat belum dapat ditentukan, jika peubah dalam predikat tersebut belum digantikan oleh anggota semesta.

Definisi 1.10

Suatu predikat atau proposisi terbuka adalah suatu proposisi yang melibatkan peubah yang nilainya tidak ditentukan. Sedangkan semesta adalah himpunan nilai-nilai yang mungkin menggantikan peubah dalam suatu predikat.

Proposisi terbuka atau predikat sering juga disebut dengan fungsi pernyataan yang merupakan kalimat terbuka yang ditulis sebagai $p(x)$ yang bersifat bahwa $p(a)$ bernilai benar atau salah untuk setiap a anggota semesta pembicaraan.

Contoh 1.18

1. $p(x) := 9 - x \leq 6$.

   Misalkan $p(x)$ adalah predikat pada himpunan bilangan cacah (semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan cacah). $p(x)$ akan bernilai benar jika peubah x diganti dengan bilangan cacah {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} dan bernilai salah untuk bilangan cacah yang lainnya.
2. $h(x, y) := x + y = 0$.

   Misalkan $h(x,y)$ adalah predikat pada himpunan bilangan bulat.

   $h(x,y)$ akan bernilai benar jika peubah x dan y adalah bilangan bulat dan memenuhi sifat $y = -x$.
3. $r(a,b)$:= a bersaudara dengan b.

   Misalkan $r(a,b)$ adalah predikat pada himpunan manusia.

   $r(a,b)$ akan bernilai benar jika peubah a dan b pada kenyataannya bersaudara.
4. $q(x)$:= x bilangan prima yang lebih besar dari dua dan termasuk bilangan genap.

   Misalkan $p(x)$ adalah predikat pada himpunan bilangan asli. Berapapun bilangan asli sebagai penggati peubah x, predikat $p(x)$ selalu bernilai salah, dengan kata lain tidak ada anggota bilangan asli yang dapat memenuhi predikat tersebut.

Dengan memperhatikan contoh predikat di atas, maka suatu predikat mungkin saja akan bernilai benar untuk semua anggota semesta, atau benar untuk beberapa saja atau bahkan tidak ada anggota semesta yang memenuhi predikat tersebut.

Selain dengan memberi nilai yang sesuai bagi peubah pada suatu predikat, untuk mendapatkan suatu proposisi kita juga dapat menambahkan kata-kata seperti setiap, seluruh, ada, beberapa, paling sedikit satu dan lain-lain di awal predikat. Penambahan kata-kata tersebut dikenal dengan pengkuatifikasi, yang terbagi atas dua bagian : kuatifikasi universal (umum) dan kuatifikasi eksistensi (khusus).

1.6.2. Kuatifikasi Universal

Kuatifikasi universal dicirikan oleh kata di depan predikat seperti semua, setiap atau seluruh. Misalkan $p(x)$ adalah suatu predikat. Kata-kata seperti semua, setiap atau seluruh disebut sebagai **suku kuantifikasi universal.** Penambahan suku kuantifikasi universal pada suatu predikat akan menjadikannya sebagai proposisi kuatifikasi universal, yaitu :

"semua x, berlaku $p(x)$" yang dinotasikan dengan "$\forall\, x, p(x)$".

Proposisi ini akan bernilai benar, jika dipenuhi oleh semua anggota semesta atau predikatnya bernilai benar untuk semua anggota semesta.

Contoh 1.19

1. Misalkan $p(x)$: = x + 1 adalah bilangan ganjil.

   Proposisi : "$\forall\, x$ bilangan genap, berlaku $p(x)$" merupakan proposisi yang benar mengingat semua bilangan genap kalau ditambahkan dengan 1 merupakan bilangan ganjil. Tetapi,

   Proposisi : "$\forall\, x$ bilangan asli, berlaku $p(x)$" merupakan proposisi yang salah sebab ada anggota bilangan asli jika ditambah dengan satu bukan merupakan bilangan ganjil tetapi merupakan bilangan genap, contoh 3 bilangan asli, 3 + 1 = 4 dan 4 adalah bilangan genap.
2. Misalkan $q(x)$: = $x + 1 \geq 3$.

   Proposisi : "$\forall\, x$ bilangan asli, berlaku q(x)" merupakan proposisi yang bernilai salah sebab 1 bilangan asli tetapi 1 + 1 = 2 < 3.
3. Semua manusia akan mati. Proposisi ini bernilai benar karena tak seorang pun manusia yang hidupnya kekal.
4. Setiap segitiga sama kaki memiliki sudut alas yang kongruen. Bernilai benar, kenapa?
5. Setiap warga negara wajib mematuhi hukum. Bernilai benar, kenapa?

Contoh 1.20

Misalkan M(x) : = x adalah matematikawan; K(x) : = x kritis dengan semesta pembicaraan himpunan manusia. Proposisi "semua matematikawan adalah kritis". Proposisi ini ekivalen dengan "Untuk setiap x manusia, jika x matematikawan maka x kritis".

Dengan demikian proposisi tersebut dapat dilambangkan dengan :

$$\forall\, x \in \mathrm{S},\ [\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{K}(x)]$$

<u>Diskusikan :</u> mengapa notasi $\forall\, x \in \mathrm{S},\ [\mathrm{M}(x) \wedge \mathrm{K}(x)]$ tidak melambangkan proposisi yang diberikan dengan benar?

1.6.3. Kuatifikasi Eksistensi

Kuatifikasi eksistensi atau khusus dicirikan oleh kata di depan predikat seperti ada, beberapa, paling sedikit satu, setidaknya satu dan lain-lainnya. Kata-kata ada, beberapa, paling sedikit satu, setidaknya satu atau yang lainnya disebut **suku kuantifikasi eksistensi.** Misalkan $p(x)$ adalah suatu predikat. Penambahan suku kuantifikasi eksistensi pada predikat tersebut akan menjadikannya suatu proposisi kuatifikasi khusus, yaitu :

"Ada x sehingga berlaku $p(x)$" yang dinotasikan dengan "$\exists\, x \ni p(x)$".

Proposisi ini akan bernilai benar, jika dipenuhi oleh paling sedikit satu anggota semesta.

Contoh 1.21

1. Misalkan $p(x) := x$ bilangan prima yang genap, dengan semesta $\mathrm{S} = \mathbb{N}$.

   Proposisi " Ada x bilangan prima yang genap" merupakan proposisi yang benar, sebab 2 bilangan asli, genap dan prima.
2. Beberapa burung tidak bisa terbang.

   Proposisi ini bernilai benar, karena burung onta adalah termasuk dalam semesta himpunan burung tetapi burung onta tidak bisa terbang.
3. Ada semut yang beratnya 3 ton.

   Proposisi ini salah, mengingat kenyataan bahwa tidak ada satu pun semut yang memiliki berat 3 ton.
4. Ada satu dan hanya satu akar-akar dari persamaan $x^2 - 1 = 0$.

   Proposisi ini bernilai salah, sebab akar-akar dari $x^2 - 1 = 0$ adalah 1 dan –1.

   Catatan : Suku pengkuantifikasi ada satu dan hanya satu dilambangkan dengan "**∃!**" dan bernilai benar, hanya jika dipenuhi oleh tepat satu dari anggota semesta.

   Contoh : Misalkan $p(x) := x$ bilangan prima yang genap dan semesta adalah $\mathbb{N}$.

Proposisi : $\exists! \, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \ni \boldsymbol{p(x)}$

dibaca : Ada satu dan hanya satu x anggota $\mathbb{N}$ sehingga berlaku $p(x)$.

Proposisi sisi ini bernilai benar sebab 2 adalah satu-satunya bilangan prima yang genap

5. Paling sedikit ada seorang dalam keluarga Ahmad yang bergolongan darah O. Kebenaran proposisi ini sangat bergantung pada kenyataan pada keluarga Ahmad, jika ada diantara keluarga Ahmad yang bergolongan darah O maka proposisi tersebut benar, tetapi jika sebaliknya tak satu pun keluarga Ahmad bergolongan darah O maka proposisi tersebut bernilai salah.

1.6.4. Negasi Kuatifikasi

Ingkaran dari suatu proposisi kuantifikasi pada prinsipnya sama dengan ingkaran proposisi biasa. Ingat kembali definisi ingkaran suatu proposisi sebagaimana yang tertuang pada tabel kebenaran berikut:

p	$\neg p$
B	S
S	B

Untuk memahami ingkaran dari suatu proposisi, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.22

Misal diberikan suatu predikat P(x) dengan semesta pembicaraan S = {a, b, c}.

1). Proposisi kuantifikasi universal : "$\forall$ x, berlaku P(x)" : = "untuk setiap x dalam S, berlaku P(x)". Hal ini berarti " P(a) benar dan P(b) benar dan P(c) benar" atau dengan menggunakan lambang :

$$\text{“}\forall x, P(x) := \forall x, \text{berlaku } P(x) := P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)\text{”}$$

2). Proposisi kuantifikasi khusus : " $\exists$ x $\ni$ P(x)" : = "Ada x sehingga P(x) ". Hal ini berarti "ada x dalam S sehingga P(a) benar atau P(b) benar atau P(c) benar" atau dengan menggunakan lambang :

$$\text{“}\exists x \ni P(x) := P(a) \vee P(b) \vee P(c)\text{”}$$

3). Ingkaran untuk proposisi kuantifikasi universal dapat diperoleh dengan pola sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \neg\,[\forall\, x, P(x)] &= \neg\,[P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)] \\ &= \neg\, P(a) \vee \neg\, P(b) \vee \neg\, P(c) \\ &= (\exists x) \ni \neg\, P(x) && \text{(menurut (2))} \end{aligned}$$

Sedangkan, Ingkaran untuk kuantifikasi eksistensial dapat diperoleh dengan pola sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \neg\,[\exists\, x \ni P(x)] &= \neg\,[P(a) \vee P(b) \vee P(c)] \\ &= \neg\, P(a) \wedge \neg\, P(b) \wedge \neg\, P(c) \\ &= (\forall\, x), \neg\, P(x) && \text{(menurut (1))} \end{aligned}$$

Berdasarkan ilustrasi di atas, hasil yang sama akan diperoleh untuk proposisi kuantifikasi dengan semesta pembicaraan yang memiliki anggota tak hingga banyaknya, yaitu :

$$\neg\,[\forall\, x \in S, P(x)] = (\exists x) \ni \neg\, P(x)$$

$$\neg\,[\exists\, x \in S \ni P(x)] = (\forall\, x), \neg\, P(x)$$

Contoh 1.23

Dengan menggunakan pola di atas, tentukan ingkaran untuk masing-masing proposisi kuatifikasi berikut :

a). Semua peserta OSPEK’06 memperoleh sertifikat dari panitia.

b). Beberapa mahasiswa Unram memakai kaca mata

c). Ada bilangan prima yang genap

d). Ada tepat satu bilangan bulat yang memenuhi $x^2 - 2x + 1 = 0$.

e). Paling sedikit satu dari mahasiswa Matematika berasal dari Lombok Timur

Jawab :

a). Misalkan P(x) : = x memperoleh sertifikat dari panitia, dengan semesta pembicaraan S adalah himpunan semua peserta OSPEK’06.

Proposisi : "$\forall x \in S, P(x)$".

Negasi : "$\exists x \in S \ni \neg P(x)$" atau dalam bahasa verbal "ada peserta OSPEK'06 yang tidak mendapat sertifikat dari panitia".

b). Misalkan $Q(x) := x$ memakai kacamata, dengan semesta pembicaraan S adalah himpunan mahasiswa Unram.

Proposisi : "$\exists x \in S \ni Q(x)$" .

Negasi : "$\forall x \in S, \neg Q(x)$" atau dalam bahasa verbal dinyatakan dengan "semua mahasiswa Unram tidak memakai kaca mata".

c). Misalkan $R(x) := x$ bilangan genap, dengan semesta pembicaraan S adalah himpunan bilangan prima.

Proposisi : "$\exists x \in S \ni R(x)$"

Negasi : "$\forall x \in S, \neg R(x)$" atau dalam bahasa verbal dinyatakan dengan "semua bilangan prima adalah bukan bilangan genap", atau "semua bilangan prima adalah bilangan ganjil".

d). Misalkan $T(x) := x$ memenuhi $x^2 - 2x + 1 = 0$ dengan semesta pembicaraan S adalah himpunan bilangan bulat.

Proposisi : "$\exists! x \in S \ni T(x)$"

Negasi : "$\forall x \in S, \neg T(x)$" atau dalam bahasa verbal dinyatakan dengan "semua bilangan bulat tidak memenuhi $x^2 - 2x + 1 = 0$" atau "semua bilangan bulat berlaku $x^2 - 2x + 1 \neq 0$ ".

e). Misalkan $U(x) := x$ berasal dari Lombok Timur dengan semesta pembicaraan adalah himpunan mahasiswa Matematika.

Proposisi : "$\exists x \ni U(x)$"

Negasi : "$\forall x, \neg U(x)$" atau dalam bahasa verbal dinyatakan dengan "semua mahasiswa Matematika tidak berasal dari Lombok Timur",

1.6.5. Proposisi dengan Dua / Lebih Suku Pengkuantifikasi

Pada su bab ini kita akan mendiskusikan tentang proposisi yang memuat dua atau lebih suku pengkuantifikasi. Biasanya proposisi seperti ini muncul dalam suatu proposisi yang mengandung dua atau lebih peubah, contoh : "ada x bilangan bulat sehingga setiap bilangan bulat y berlaku $x + y = y$" yang dapat dilambang dengan

"$\exists\, x \in \mathbb{Z} \ni \forall\, y \in \mathbb{Z}, \{ x + y = y \}$ ".

Jika suatu proposisi mengandung dua atau lebih suku pengkuantifikasi maka nilai kebenaran proposisi tersebut bergantung pada urutan suku pengkuantifikasi, sebagai contoh perhatikan dua proposisi berikut:

1. $\forall\, x \in \mathbb{Z}, \exists\, y \in \mathbb{Z} \ni \{ x + y = 5 \}$
2. $\exists\, x \in \mathbb{Z} \ni \forall\, y \in \mathbb{Z}, \{ x + y = 5 \}$

Proposisi pertama bernilai benar dan proposisi kedua bernilai salah.

Proposisi pertama : jika kita mengambil sebarang bilangan buat x maka selalu dapat kita temukan bilangan bulat y dalam hal ini $y = 5 - x$ sehingga $x + y = 5$. Sedangkan untuk proposisi kedua, jika kita punya bilangan bulat tertentu x, untuk semua bilangan bulat y berlaku $x + y = 5$, **mustahil !**. Sebagai contoh, pilih $x = 2$, untuk $y = 3$ proposisi tersebut benar tetapi bilangan bulat selain 3 banyak sekali, sebut saja $y = 1$, $x + y \neq 5$.

Ingkaran atau negasi dari proposisi yang mengandung dua/lebih suku pengkuantifikasi memiliki pola yang sama dengan proposisi dengan satu suku pengkuantifikasi.

Contoh 1.24

Tentukan negasi dari

a. $\forall\, x \in \mathbb{Z}, \exists\, y \in \mathbb{Z} \ni \{ x + y = 5 \}$.

b. $\exists\, x \in \mathbb{Z} \ni \forall\, y \in \mathbb{Z}, \{ x + y = 5 \}$

Jawab :

a.

$$\begin{aligned} \neg\, [\forall\, x \in \mathbb{Z}, \exists\, y \in \mathbb{Z} \ni \{ x + y = 5 \}] &= \exists\, x \in \mathbb{Z} \ni \neg\, [\exists\, y \in \mathbb{Z} \ni \{ x + y = 5 \}] \\ &= \exists\, x \in \mathbb{Z} \ni \forall\, y \in \mathbb{Z}, \neg\, [x + y = 5] \\ &= \exists\, x \in \mathbb{Z} \ni \forall\, y \in \mathbb{Z}, x + y \neq 5 \end{aligned}$$

b.

$$\neg [\exists x \in \mathbb{Z} \ni \forall y \in \mathbb{Z}, \{ x + y = 5 \}] = \forall x \in \mathbb{Z}, \neg [\forall y \in \mathbb{Z}, \{ x + y = 5 \}]$$
$$= \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \ni \neg [x + y = 5]$$
$$= \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \ni x + y \neq 5$$

Contoh 1.25

Tentukan negasi dari

a. $(\forall x)(\exists y)(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}$

b. $(\exists x)(\forall y)(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}$

Jawab :

a. $\neg [(\forall x)(\exists y)(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}]$

$$= (\exists x) \ni \neg [(\exists y)(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}]$$
$$= (\exists x) \ni (\forall y), \neg [(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}]$$
$$= (\exists x) \ni (\forall y), (\exists z) \ni \neg [A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)]$$
$$= (\exists x) \ni (\forall y), (\exists z) \ni [A(x, y, z) \wedge B(x, y, z)] \wedge \neg C(x, y, z)]$$

b. $\neg [(\exists x)(\forall y)(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}]$

$$= (\forall x), \neg [(\forall y)(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}]$$
$$= (\forall x), (\exists y) \ni \neg [(\forall z), \{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)\}]$$
$$= (\forall x), (\exists y) \ni [(\exists z) \ni \neg [A(x, y, z) \wedge B(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)]]$$
$$= (\forall x), (\exists y) \ni [(\exists z) \ni [\{A(x, y, z) \wedge B(x, y, z)\} \wedge \neg C(x, y, z)]]$$

Latihan

1. Lambangkan proposisi-proposisi berikut dengan menggunakan suku pengkuantifikasi, peubah dan predikat yang benar serta denagan semesta pembicaraan yang paling umum.
   a. semua bilangan genap dapat dibagi 2.
   b. semua burung dapat terbang
   c. tidak semua profesor botak
   d. Ada dosen yang baik

e. beberapa mahasiswa rajin belajar

f. untuk semua bilangan bulat, *p* prima dan *p* ganjil.

g. tidak semua artis terlibat kasus narkoba.

h. Jika Ahmad sakit maka semua murid bolos sekolah.

i. Segitiga ABC sama sisi merupakan syarat cukup bagi segitiga ABC sama kaki.

2. Lambangkan proposisi berikut (i) tanpa menggunakan suku pengkuantifikasi umum atau (ii) tanpa menggunakan suku pengkuantifikasi khusus.

a. Tidak semua lelaki pemarah.

b. Tidak ada satupun bilangan prima yang genap.

c. setiap bilangan asli adalah bilangan prima atau bilangan komposit

d. beberapa mahasiswa matematika memakai kacamata

3. Tuliskan ingkaran dari masing-masing proposisi berikut ini.

a. untuk setiap x bilangan riil, $x^2 \geq 0$.

b. Ada bilangan asli yang prima sekaligus genap.

c. semua bilangan genap habis dibagi dua.

d. tidak semua bilangan prima adalah ganjil.

e. tidak ada profesor yang bodoh.

f. beberapa mahasiswa matematika senang dengan musik. (semesta = himpunan semua mahasiswa).

g. semua mahasiswa matematika tidak senang dengan hapalan. (semesta = himpunan semua mahasiswa).

4. Lambangkan dan tentukan negasi dari masing-masing proposisi berikut ini.

a. untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, ada $y \in \mathbb{R}$ sehingga $x + y = 0$.

b. untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, ada $y \in \mathbb{R}$ sehingga $x^2 = y$.

c. Ada $x \in \mathbb{R}$ sehingga setiap $y \in \mathbb{R}$ berlaku $x + y = 0$

d. Beberapa $x \in \mathbb{R}$ memenuhi $x^2 + 5x + 6 = 0$.

e. ada $x, y, z \in \mathbb{R}$ sehingga $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

1.7. Argumen

Logika, sebagaimana telah dikemukakan di awal merupakan suatu ilmu yang mempelajari cara bernalar dengan baik. Dalam bernalar, kita berhadapan dengan sejumlah informasi, fenomena atau fakta yang akan digunakan untuk menarik suatu kesimpulan. Informasi, fenomena atau fakta ini disebut premis atau hipotesis.

Dalam matematika, premis biasa berupa definisi, aksioma atau pernyataan yang dibuktikan kebenarannya (teorema, lemma atau akibat). Sedang kesimpulan merupakan pernyataan yang diperoleh sebagai impilkasi logis dari konjungsi beberapa premis yang ada. Pernyataan dalam bentuk konjungsi beberapa premis berimplikasi pada kesimpulan disebut sebagai Argumen. Secara formal definisi argumen diberikan berikut ini.

Definisi 1.11

Argumen adalah suatu proposisi atau pernyataan yang berbentuk

$$[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \dots \wedge H_N] \rightarrow \mathrm{K} \qquad (*)$$

dengan proposisi-proposisi H_1, H_2, H_3, … , H_N sebagai premis atau hipotesis dan K sebagai proposisi kesimpulan.

Suatu argumen dikatakan sahih atau valid, jika konjungsi beberapa hipotesis yang ada bernilai benar berimplikasi pada kesimpulan yang benar. Dengan kata lain, argumen sahih atau valid, jika proposisi (*) merupakan suatu tautologi. Sebaliknya, argumen dikatakan tidak sahih atau tidak valid, jika proposisi (*) bukan tautologi. Oleh karena itu, kesahihan atau validitas suatu argumen dapat ditunjukkan dengan menggunakan tabel kebenaran atau menggunakan hukum-hukum kesetaraan logik.

Contoh 1.26

Periksalah validitas argumen berikut : “ Jika Adit belajar giat maka Ia akan lulus ujian. Ternyata Adit lulus ujian. Oleh karena itu, Adit belajar giat.”

Jawab:

Misalkan p : = Adit belajar giat; q : = Adit lulus ujian.

Argumen di atas dapat dituliskan sebagai berikut ini.

Premis : $H_1 : = p \rightarrow q$

$H_2 : = q$

Kesimpulan: $K : = p$

dilambangkan dengan

$$\begin{array}{l} H_1 : = p \rightarrow q \\ H_2 : = q \\ \hline \therefore K : = p \end{array}$$

Untuk memeriksa argumen di atas sahih atau tidak, maka harus diperiksa apakah bentuk implikasi $[\ (H_1 \wedge H_2) \rightarrow K\ ]$ merupakan suatu tautologi atau bukan. Dengan menggunakan tabel kebenaran akan diperoleh,

p	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	q	$\rightarrow$	p
B	B		B		B	B	**B**	B
B	S		S		S	S	**B**	B
S	B		B		B	B	**S**	S
S	S		B		S	S	**B**	S
							*	

Jadi, berdasarkan hasil di atas dapat disimpulkan bahwa argumen tersebut tidak sahih. Hal ini dapat kita pahami mengingat bahwa adit lulus ujian hanya merupakan syarat perlu bagi Adit belajar giat. Ini berarti bahwa Adit lulus ujian belum cukup untuk menjamin bahwa Adit belajar giat, sebab mungkin saja terjadi adit lulus ujian karena nyontek atau Ia dikenal oleh gurunya atau yang lainnya.

Contoh 1.27

Periksa kevalidan argumen berikut dengan menggunakan hukum-hukum kesetaraan logik,

$$\begin{array}{l} H_1 : = p \rightarrow q \\ H_2 : = \neg q \\ \hline \therefore K : = \neg p \end{array}$$

Jawab :

Untuk memeriksa argumen di atas sahih atau valid, maka kita harus memeriksa apakah proposisi [$(H_1 \wedge H_2) \rightarrow K = ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$] merupakan suatu tautologi atau bukan.

$$
\begin{aligned}
((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p &= \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p \\
&= (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q)) \vee \neg p \\
&= ((p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p \\
&= ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p \\
&= ((p \vee q) \wedge t) \vee \neg p \\
&= (p \vee q) \vee \neg p \\
&= q \vee (p \vee \neg p) \\
&= q \vee t \\
&= t
\end{aligned}
$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa argumen di atas adalah sahih atau valid.

Aturan inferensia sering juga digunakan sebagai dasar untuk menyatakan suatu argumen sahih atau valid, diantaranya adalah modus ponens, modus tollens dan aturan silogisme.

Modus Ponens

Modus ponens merupakan suatu argumen valid atau sahih yang berbentuk ”jika proposisi p benar dan proposisi $p \rightarrow q$ benar, diperoleh kesimpulan q benar”, yang dinotasikan dengan

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{H}_1 := p \rightarrow q \\
\mathrm{H}_2 := p \\
\hline
\therefore K := q
\end{array}
$$

Kesahihan modus ponen dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel kebenaran atau hukum-hukum kesetaraan logik (silakan anda coba sendiri).

Contoh 1.28

Tentukan kesahihan argumen berikut:

"Ahmad anak yang rajin; Jika Ahmad rajin maka Ia akan disayang oleh ibunya. Oleh karena itu, Ahmad disayang oleh ibunya".

Jawab :

Misalkan p : = Ahmad Anak yang rajin; q : = Ahmad disayang oleh ibunya.

Maka argumen di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} H_1 := p \\ H_2 := p \to q \\ \hline \therefore K := q \end{array} \quad \text{atau} \quad \begin{array}{l} H_1 := p \to q \\ H_2 := p \\ \hline \therefore K := q \end{array}$$

dengan memperhatikan bentuk di atas, maka dapat dikenali bahwa argumen di atas memenuhi pula modus ponens. Oleh karena itu, argumen di atas sahih atau valid.

Contoh 1.29

Tentukan kesahihan argumen berikut :

" Dua bukan bilangan prima atau dua satu-satunya bilangan prima yang genap. ternyata dua bilangan prima. Oleh karenanya, dua satu-satunya bilangan prima yang genap"

Jawab :

Misalkan a : = dua bilangan prima; b : = dua satu-satunya bilangan prima yang genap.

Maka argumen di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} H_1 := \neg \mathrm{p} \vee \mathrm{q} \cong \mathrm{p} \to q \\ H_2 := p \\ \hline \therefore K := q \end{array}$$

Dengan demikian argumen di atas sesuai dengan pola modus ponens, sehingga argumen tersebut merupakan argumen yang sahih.

Modus Tollens

Modus tollens secara kasat mata berbeda dengan modus ponens, tetapi kalau kita cermati dengan seksama maka kita dapati bahwa kedua modus ini sebenarnya "sama". Hal ini dapat kita tunjukkan dengan menggunakan hukum atau sifat ekivalensi logik. Adapun modus tollens adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} H_1 := p \to q \\ H_2 := \quad \neg q \\ \hline \therefore K := \neg p \end{array}$$

Karena $p \to q \cong \neg q \to \neg p$, maka modus tollens dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{array}{l} H_1 := \neg q \to \neg p \\ H_2 := \quad \neg q \\ \hline \therefore K := \neg p \end{array}$$

Dengan memperhatikan model terakhir dan modus ponens maka kita tidak akan ragu mengatakan bahwa sebenarnya kedua modus ini pada dasarnya sama saja.

Seperti modus ponens, argumen yang memenuhi modus tollens juga dijamin kesahihan atau kevalidannya. Dengan kata lain, argumen yang memiliki pola seperti modus tollens dapat dinyatakan sahih tanpa melalui proses pembuktian lagi.

Contoh 1.30

Tentukan kesahihan argumen berikut:

"Jika adit rajin belajar maka Ia akan lulus ujian. Adit tidak lulus ujian. oleh karena itu, Adit tidak rajin belajar"

Jawab:

Misalkan s : = Adit lulus ujian; t : = Adit rajin belajar.

Maka argumen di atas dapt ditulis

$$\begin{array}{l} H_1 := s \to t \\ H_2 := \quad \neg t \\ \hline \therefore K := \neg s \end{array}$$

Dengan demikian, argumen di atas ssuai dengan modus tollens. Oleh karenanya argumen tersebut sahih.

Kaidah Silogisme

Model argumen yang memenuhi kaidah silogisme adalah sebagai berikut :

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{H}_1 := p \to q \\
\mathrm{H}_2 := q \to r \\
\hline
\therefore K := p \to r
\end{array}
$$

Argumen yang memenuhi kaidah ini juga dijamin kesahihan atau kevalidannya. Untuk membuktikannya dapat menggunakan tabel kebenaran atau hukum-hukum kesetaraan logik, yaitu menunjukkan bahwa proposisi :

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

merupakan suatu tautologi. (Cobalah kerjakan sendiri).

Kaidah silogisme juga berlaku untuk hipotesis yang melibatkan lebih dari dua proposisi. Misalkan terdapat n buah hipotesis $H_1, H_2, \ldots, H_n$ dengan $H_j := p_j \to p_{j+1}$ untuk j = 1, 2, 3, … , n, (n+1). Maka kaidah silogisme berlaku,

$$
\begin{array}{ll}
H_1 & := p_1 \to p_2 \\
H_2 & := p_2 \to p_3 \\
\vdots & \\
H_{n-1} & := p_{n-1} \to p_n \\
H_n & := p_n \to p_{n+1} \\
\hline
\therefore K & := p_1 \to p_{n+1}
\end{array}
$$

Contoh 1.31

Tentukan kasahihan argumen berikut:

“Jika Ahmad mahasiswa matematika maka Ia ganteng. Jika Ahmad ganteng maka Ia akan disenangi banyak mahasiswi. Oleh karena itu, jika Ahmad mahasiswa matematika maka Ia akan disenangi banyak mahasiswi”.

Jawab :

Misalkan p : = Ahmad mahasiswa matematika; q : = Ahmad ganteng ; r : = Ahmad disenangi banyak mahasiswi.

Argumen di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{array}{ll}
H_1 & := p \rightarrow q \\
H_2 & := q \rightarrow r \\
\hline
\therefore K & := p \rightarrow r
\end{array}
$$

Berdasarkan kaidah silogisme maka argumen di atas merupakan argumen yang sahih.

Contoh 1.32

Tentukan kesahihan argumen berikut,

"Adit tidak suka main bola atau Ridho suka main mobil-mobilan. Jika Ridho suka main mobil-mobilan maka Syamil senang main sepeda. Adit suka main bola atau Claudia suka main boneka. Ternyata Syamil tidak senang main sepeda. Jadi, kesimpulannya Claudia suka main boneka".

Jawab:

Misalkan

p : Adit suka main bola; q : Ridho suka main mobil-mobilan;

r : Syamil senang main sepeda; s : Claudia suka main boneka.

Argumen tersebut dapat ditulis :

$$
\begin{array}{l}
H_1 := \neg p \vee q \cong p \rightarrow q \\
H_2 := q \rightarrow r \\
H_3 := p \vee s \cong \neg p \rightarrow s \\
H_4 := \neg r \\
\hline
\therefore K := s
\end{array}
$$

Dengan menggunakan aturan inferensia secara bersamaan diperoleh

$$
\begin{array}{ll}
H_1 : = p \rightarrow q & \\
\underline{H_2 : = \ q \rightarrow r} & \\
K_1 : = p \rightarrow r & \text{(Kaidah silogisme)} \\
\underline{H_4 : = \ \neg\, r} & \\
K_2 : = \ \neg\, p & \text{(Modus Tollens)} \\
\underline{H_3 : = \neg\, p \rightarrow s} & \\
\therefore K : = \ s & \text{(Modus ponens)}
\end{array}
$$

Jadi, Argumen tersebut sah.

Selain menggunakan aturan inferensia di atas, metode lain yang dapat digunakan untuk menguji kesahihan suatu argumen adalah metode pohon, khususnya berkaitan dengan argumen-argumen yang cukup kompleks. Metode ini menggunakan prinsip ingkaran sebagai dasarnya.

Metode Pohon

Prinsip yang medasari metode ini adalah ingkaran atau negasi dari suatu proposisi. Ingat, jika suatu proposisi p bernilai benar maka proposisi $\neg\, p$ bernilai salah. Khusus berkaitan dengan argumen, proposisi yang kita gunakan adalah adalah berbentuk implikasi. Pada penjelasan di muka, proposisi $p \rightarrow q$ memiliki negasi yang berbentuk $p \wedge \neg\, q$. Dalam hal ini, jika proposisi $p \rightarrow q$ benar maka proposisi $p \wedge \neg\, q$ bernilai salah dan sebaliknya. Lebih jelasnya, perhatikan tabel kebnaran berikut ini.

p	q	$\neg\, q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \neg\, q$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S
			*	**

Seperti yang dapat kita amati pada kolom (*) dan (**), proposisi $p \rightarrow q$ bernilai benar jika dan hanya jika proposisi $p \wedge \neg q$ bernilai salah. Alasan inilah yang menjadi dasar metode pohon. Kita susun suatu pohon dari konjungsi semua premis atau hipotesa yang ada beserta ingkaran kesimpulannya. Jika ternyata semua cabang dari pohon tersebut kontradiksi, maka argumen tersebut sahih. Sebaliknya jika paling tidak terdapat satu cabang yang tidak kontradiksi maka argumen yang diberikan tidak sahih.

Algoritma Metode Pohon :

1. Daftar semua premis/hipotesis dan ingkaran kesimpulan dalam bentuk konjungsi atau disjungsi
2. Mulai dari salah satu hipotesis atau ingkaran kesalahan.
3. Kemudian turunkan sisanya dengan menggunakan aturan : dua atau lebih proposisi yang dirangkai oleh perangkai "$\wedge$" turunkan ke bawah, sedangkan dua atau lebih proposisi yang dirangkai oleh perangkai "$\vee$" dituliskan sehingga membentuk cabang.
4. Periksa apakah ada cabang yang "**tertutup**", artinya pada cabang tersebut terjadi suatu kontadiksi (terdapat suatu proposisi dengan ingkarannya) dan berilah tanda silang ($\times$) pada cabang tertutup tersebut.
5. Kembali kelangkah ke-3, jika masih ada hipotesis atau ingkaran kesimpulan yang tersisa dan algoritma ini **berhenti**, jika semua cabang tertutup atau semua hipotesis dan ingkaran kesimpulan sudah diturunkan.

Kesimpulan : Argumen yang diperiksa **sahih**, jika semua cabang tertutup dan argumen yang diperiksa **tidak sahih,** jika sekurang-kurangnya terdapat satu cabang yang tidak tertutup.

Contoh 1.33

Buktikan kesahihan kaidah silogisme dengan menggunakan metode pohon

$$\begin{array}{l} H_1 := p \rightarrow q \\ H_2 := q \rightarrow r \\ \hline \therefore K := p \rightarrow r \end{array}$$

Metode Pohon untuk kaidah silogisme :

Langkah 1.

$p \to q \cong \neg p \vee q$

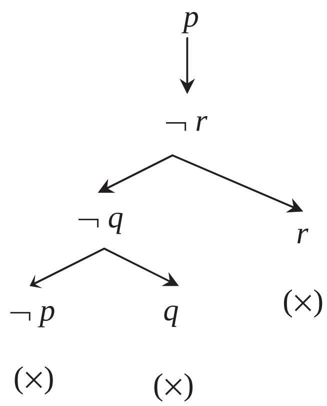
$q \to r \cong \neg q \vee r$

$\neg(p \to r) \cong p \wedge \neg q$

Langkah kedua :

Mulai dari ingkaran kesimpulan $p \wedge \neg q$

Langkah ketiga :



Karena ketiga cabang pada pohon di atas tertutup maka kaidah silogisme merupakan suatu argumen yang sahih.

Latihan

Selidikilah kesahihan argumen-argumen berikut dengan menggunakan dalil atau aturan inferensia atau metode pohon!

1. Adit bukan mahasiswa matematika atau Dita gadis cantik. Dita bukan gadis cantik. Oleh karena itu, Adit mahasiswa matematika.
2. Jika hari ini hujan maka jalan licin. Jalan licin. Oleh karena itu, hari ini hujan.
3. Jika x bilangan prima maka x bilangan ganjil atau x = 2. Jika x bilangan ganjil atau x = 2 maka maka x hanya memiliki 2 faktor. Oleh karenanya, jika x bilangan prima maka x hanya memiliki 2 faktor.

4. Buktikan hukum berikut ini.
    a. Jika $x + y$ ganjil dan y ganjil maka x genap.
    b. Jika xy genap maka x dan y keduanya genap atau salah satu dari keduanya genap.
    c. Jika x bilangan bulat dan x^2 genap maka x genap
    d. Jika $x^2 - x + 6 = 0$ maka $x \neq 1$.
    e. Jika p adalah hasil kali tiga bilangan asli yang berurutan maka p habis dibagi oleh 3.
5. Adit tidak lapar atau dia menagis. Adit tertawa atau dia tidak menangis. Jika Adit tertawa maka mukanya berwarna merah. Oleh karenanya, jika Adit lapar maka mukanya merah.
6. Jika saya diterima di PS. Matematika dan saya belajar setidaknya 7 jam sehari maka saya akan lulus dengan predikat *cum laude*. Saya belajar setidaknya 7 jam sehari. Jadi, saya akan lulus dengan predikat *cum laude.*
7. Jika hari hujan maka Adit bolos kuliah. Kemarin Adit tidak kuliah. Oleh karenanya, kemarin hari hujan.
8. Pembunuhnya adalah juru masak atau tukang kebun. Jika juru masak yang membunuh korban maka dia tidak akan mampu memasak seluruh menu yang tersedia. Juru masak mampu memasak seluruh menu yang tersedia. Disimpulkan bahwa pembunuhnya adalah tukang kebun.
9. Jika suatu pasar merupakan suatu pasar bersaing, maka para pedagang secara individu tidak dapat mempengaruhi harga. jika pedagang secara individu tidak dapat mempengaruhi haga maka terdapat banyak pedagang di pasar itu. Hasil survey menunjukkan bahwa jumlah pedagang di pasar tersebut adalah besar. oleh karenanya, pasar tersebut adalah pasar bersaing.
10. jika suatu bilangan bulat n habis dibagi oleh 3 dan 4 maka n habis dibagi oleh 12. n habis dibagi 12 jika dan hanya jika n bersisa 0 jika dibagi 12. Diberikan suatu bilangan bulat n yang habis dibagi 4, tetapi tidak habis dibagi 3. Oleh karena, jika n dibagi 12 maka n akan meninggalkan sisa 0.

BAB II
PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

2.1. Teknik Dasar Pembuktian

Pembuktian dalam matematika dapat dikatakan sebagai roh atau jiwa yang mengembangkan matematika itu sendiri. Tanpa pembuktian, maka hukum-hukum dalam matematika tidak akan berkembang dan dijamin validitasnya. Oleh karenanya, jika anda memilih matematika dan atau bidang yang banyak menggunakan pola pikir matematika maka sudah seharusnya anda harus bisa membaca, mengerti dan menulis suatu pembuktian.

Pembuktian merupakan suatu proses validasi hukum matematika yang biasanya diberikan dalam bentuk argumen. Seperti yang diungkapkan sebelumnya, secara struktur argumen terdiri atas dua bagian yaitu hipotesis/premis dan kesimpulan. Dalam proses pembuktian, hal mendasar yang harus diketahui atau dipahami adalah

- Apakah yang diketahui ?
  Jawabannya diperoleh dari kumpulan proposisi hipotesis/premis yang terdapat dalam argumen (hukum matematika) yang akan dibuktikan.
- Apakah yang akan dibuktikan?
  Jawabannya diperoleh dari proposisi kesimpulan yang terdapat dalam argumen (hukum matematika) yang akan dibuktikan.

Sebagai contoh misalnya diberikan suatu hukum matematika yang berbunyi : " Jika segitiga ABC sama kaki maka segitiga ABC mempunyai sudut alas yang kongruen". Hukum ini merupakan pernyataan implikasi yang berbentu $p \to q$ dengan p sebagai hipotesis dan q sebagai kesimpulan. Dengan demikian, dalam membuktikan hukum tersebut kita peroleh bahwa :

- Pernyataan yang diketahui : " segitiga ABC sama kaki"
- Pernyataan yang akan dibuktikan : " sudut alas segitiga ABC kongruen"

Dalam proses pembuktian hukum matematika, setelah proses identifikasi apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan, selanjutnya adalah memilih metode apa yang akan digunakan dalam proses pembuktian tersebut. Secara umum, metode pembuktian dapat dibagi dua, yaitu **metode langsung** dan **metode tidak langsung**.

Secara umum, hukum-hukum matematika menggunakan pola pikir deduktif. Tetapi, khusus berkaitan dengan pernyataan yang melibatkan bilangan asli, matematika juga menggunakan pola pikir induktif dan kita mengenalnya dengan istilah induksi matematika. Pada bahasan selanjutnya, kita akan mengemukakan teknik dasar pembuktian yang berkaitan dengan metode langsung, metode tak langsung dan induksi matematika.

2.2. Pembuktian Langsung

Metode langsung adalah suatu proses pembuktian yang menggunakan alur maju, mulai dari hipotesis dengan menggunakan implikasi logik sampai pada pernyataan kesimpulan. Hukum-hukum dalam matematika pada umumnya berupa proposisi atau pernyataan berbentuk implikasi ($p \rightarrow q$) atau biimplikasi ($p \leftrightarrow q = p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$) atau pernyataan kuantifikasi yang dapat dirubah bentuknya menjadi pernyataan implikasi. Contoh beberapa hukum dalam matematika yang dapat dibuktikan secara langsung :

1. (sifat transitif keterbagian)
   "Misalkan a, b dan c bilangan bulat. Jika a membagi b dan b membagi c maka a membagi c".
2. "Misalkan a dan b bilangan bulat.
   $a + b$ bilangan ganjil jika dan hanya jika a atau ***b*** bilangan ganjil ".
   Catatan : pernyataan "misalkan a dan b bilangan bulat" dalam hukum ini sering juga disebut sebagai ***atribut*** bukan sebagai hipotesis.
3. "Untuk setiap x bilangan bulat genap, perkalian sebarang bilangan bulat k (tertentu) dengan x merupakan bilangan genap".

Catatan : Pernyataan ini dapat dirubah strukturnya menjadi pernyataan implikasi, yaitu "jika x bilangan bulat genap maka perkalian sebarang bilangan bulat k (tertentu) dengan x merupakan bilangan genap".

Untuk memfokuskan pembahasan kita, berikut ini akan diberikan salah satu cara membuktikan hukum-hukum di atas.

Contoh 2.1

Buktikan "Misalkan a, b dan c bilangan bulat. Jika a membagi b dan b membagi c maka a membagi c".

Sebelum membuktikan pernyataan ini, kita perlu mengetahui dulu definisi "a membagi b" yang biasa dinotasikan dengan "$a \mid b$". Definisi : a membagi b atau $a \mid b$ jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sehingga $b = k.$a .

Jawab :

Misal a, b dan c bilangan bulat sebarang.

Berdasarkan hipotesis,

$a \mid b$ artinya $b = k.a$, untuk suatu k bilangan bulat (*)

$b \mid c$ artinya $c = l.b$, untuk suatu l bilangan bulat (**)

Substitusi (*) dalam (**), diperoleh

$$c = l.b = l\,(k.\,a) = (l.k)\,a.$$

Berdasarkan sifat tertutup operasi perkalian pada himpunan bilangan bulat, terdapat t bilangan bulat sehingga $t = l.k.$

Dengan demikian diperoleh $c = t.\,a.$

Jadi, $a \mid c.$ ■

Catatan : Tanda ■ atau □ biasanya dicantumkan pada akhir setiap bukti sebagai ganti penyataan "terbukti".

Contoh 2.2.

Buktikan : “Misalkan a dan b bilangan bulat. $a + b$ bilangan ganjil jika dan hanya jika a atau $\boldsymbol{b}$ bilangan ganjil “.

Pernyataan di atas ekivalen dengan pernyataan :

(i) jika $a + b$ bilangan ganjil maka a atau $\boldsymbol{b}$ bilangan ganjil, dan

(ii) jika a atau $\boldsymbol{b}$ bilangan ganjil maka $a + b$ bilangan ganjil”.

Sehingga dalam pembuktian memerlukan dua proses pembuktian yaitu (i) dan (ii).

Jawab:

Bukti bagian (i)

Misalkan a dan b bilangan bulat sebarang dan $a + b$ bilangan ganjil (hipotesis).

Akan dibuktikan a atau b bilangan ganjil, tanpa mengurangi perumuman akan dibuktikan a bilangan ganjil

Klaim: b bilangan genap ($b = 2h$, untuk suatu h bilangan bulat)

$a + b$ bilangan ganjil, maka

$a + b = 2k + 1$, untuk suatu k bilangan bulat (*)

Substitusi $b = 2\,h$ ke dalam (*) diperoleh

$$a + b = 2k + 1 \leftrightarrow a + 2\,h = 2\,k + 1 \leftrightarrow a = 2\,h + 2\,k + 1 \leftrightarrow a = 2\,(h + k) + 1$$

berdasarkan sifat tertutup operasi penjumlahan pada himpunan bilangan bulat, terdapat m bilangan bulat sehingga $m = h + k$, sehingga $a = 2\,m + 1$.

Jadi a bilangan ganjil. ■

Dengan cara serupa kalau ingin membuktikan bahwa b bilangan ganjil.

Bukti bagian (ii)

Misalkan a dan b bilangan bulat sebarang dan a bilangan ganjil dan b bilangan genap (hipotesis). Artinya,

$a = 2\,p + 1$, untuk suatu p bilangan bulat

$b = 2\,q$, untuk suatu q bilangan bulat

(optional : akan dibuktikan $a + b$ bilangan ganjil).

Akibatnya :

$$a + b = (2\,p + 1) + (2\,q) = 2\,(p + q) + 1$$

Berdasarkan sifat tertutup operasi penjumlahan pada himpunan bilangan bulat, terdapat r bilangan bulat sehingga $r = p + q$ dan $a + b = 2\,r + 1$.

Jadi, $a + b$ bilangan ganjil. ■

Contoh 2.3.

Buktikan : Untuk setiap x bilangan bulat genap, perkalian sebarang bilangan bulat k (tertentu) dengan x merupakan bilangan genap".

Jawab :

Membuktikan pernyataan di atas ekivalen membuktikan "jika x bilangan bulat genap maka perkalian sebarang bilangan bulat k (tertentu) dengan x merupakan bilangan genap".

Bukti :

Misalkan x bilangan bulat genap sebarang dan k bilangan bulat (tertentu) .

(akan dibuktikan $k\,x$ bilangan genap)

x bilangan genap, $x = 2\,p$ untuk suatu p bilangan bulat.

Akibatnya,

$$k\,x = k\,(\,2\,p) = 2\,(\,k.p)$$

Berdasarkan sifat tertutup operasi perkalian pada himpunan bilangan bulat maka terdapat bilangan bulat q sehingga $q = k.p$. Jadi, $k\,x$ adalah bilangan genap. ■

2.3. Pembuktian tidak Langsung.

2.3.1. Metode Kontrapositif

Metode kontrapositif pada hakekatnya merupakan suatu proses pembuktian suatu pernyataan dengan memanfaatkan pernyataan lain yang ekivalen dengan pernyataan yang diberikan. Misalkan pernyataan yang diberikan berbentuk ($p \rightarrow q$), maka pembuktian tidak langsungnya menggunakan pernyataan kontrapositifnya, yaitu ($\neg\, q \rightarrow \neg\, p$). Dalam memilih metode pembuktian, apakah pembuktian secara langsung atau melalui metode kontrapositif, pada prinsipnya tidak ada aturan baku. Dalam hal ini yang berperan adalah pengalaman atau *filling* seseorang yang akan melakukan proses pembuktian. Sebagai contoh, pernyataan "jika x^2 bilangan genap maka x bilangan genap" ekivalen dengan mengatakan "jika x bukan bilangan genap (ganjil) maka x^2 bukan bilangan genap (ganjil)". Dalam hal ini, kita tidak membuktikan pernyataan "jika x^2 bilangan genap maka x bilangan genap" secara langsung, tetapi menunjukkan pernyataan "jika x bukan bilangan genap (ganjil) maka x^2 bukan bilangan genap (ganjil)", mengingat proses manipulasi (aljabar) dari x^2 untuk mendapatkan x lebih susah dibandingkan sebaliknya.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan proses pembuktian pernyataan tersebut baik secara langsung maupun menggunakan metode kontraposistif.

Contoh 2.4.

Buktikan : jika x^2 bilangan genap maka x bilangan genap.

Jawab :

Cara langsung :

Misalkan x^2 bilangan genap,

$x^2 = 2\,p$, untuk suatu p bilangan bulat.

(akan dibuktikan bahwa x adalah bilangan genap)

Untuk memperoleh x dari bentuk x^2 satu-satunya cara adalah dengan meng-akarkan bentuk x^2. Akibanya,

$$x = \sqrt{x^2} = \sqrt{2p} = \sqrt{2} \times \sqrt{p}$$

Bentuk $x = \sqrt{2} \times \sqrt{p}$ sulit untuk dijustifikasi sebagai bilangan genap. Oleh karenanya, kita hanya berhenti sampai disini, tanpa bisa menyimpulkan bahwa x adalah bilangan genap. Dengan kata lain proses pembuktian belum selesai.

Metode Kontraposistif :

Misalkan x bilangan ganjil,

$x = 2\,q + 1$, untuk suatu q bilangan bulat.

(akan dibuktikan x^2 bilangan ganjil)

Akibatnya,

$x^2 = (2\,q + 1)^2 = 4\,q^2 + 4\,q + 1 = 2\,(2\,q^2 + 2\,q) + 1$

Berdasarkan sifat tertutup operasi perkalian dan penjumlahan pada himpunan bilangan bulat, maka terdapat r bilangan bulat sehingga $r = 2q^2 + 2q$.
Dengan demikian, $x^2 = 2r + 1$, untuk suatu r bilangan bulat.
Jadi, x^2 adalah bilangan ganjil. ■

Contoh 2.5.

Buktikan bahwa fungsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x + 5$ merupakan fungsi injektif.

Catatan : Misalkan $f : A \rightarrow B$ merupakan suatu fungsi. Fungsi f dikatakan fungsi injektif atau fungsi 1-1, jika $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jawab :

Pembuktian langsung :

Misalkan $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $x_1 \neq x_2$. (akan dibuktikan bahwa $f(x_1) \neq f(x_2)$)

$$x_1 \neq x_2 \leftrightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \leftrightarrow 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5 \leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Jadi, f merupakan fungsi injektif. ■

Metode Kontraposistif :

Misalkan $f(x_1) = f(x_2)$. (akan dibuktikan $x_1 = x_2$)

$$f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \leftrightarrow x_1 = x_2$$

Jadi, f merupakan fungsi injektif.

Berbeda dengan contoh yang pertama, contoh yang kedua ini terlihat bahwa memilih cara langsung maupun kontrapositif sama saja baik dari sisi tingkat kesulitan maupun dari sisi panjang pendeknya bukti.

2.3.2. Metode Kontradiksi

Metode ini merupakan salah satu metode pembuktian tidak langsung yang memanfaatkan hubungan antara suatu proposisi dengan negasinya. Pada pembahasan sebelumnya, diungkapkan bahwa jika suatu proposisi p bernilai benar maka proposisi $\neg p$ bernilai salah atau sebaliknya.

Oleh karena itu, jika kita ingin membuktikan suatu hukum matematika yang berbentuk $p \rightarrow q$ benar, maka ini sama artinya dengan membuktikan bahwa negasinya, yaitu $p \wedge \neg q$ bernilai salah. Secara teknis, pembuktian menggunakan metode kontradiksi dimulai dengan mengandaikan kesimpulan salah, kemudian bersama dengan premis/hipotesis "diturunkan" atau "diolah" sampai mendapatkan suatu keadaan atau kenyataan yang mustahil, bisa berupa pelanggaran terhadap asumsi yang diberikan atau bertentangan dengan kenyataan yang biasa terjadi seperti $1 < 0$.

Contoh 2.6.

Buktikan dengan menggunakan metode kontradiksi bahwa "jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional maka $a + b$ adalah bilangan irrasional juga.

Jawab :

Andaikan $a + b$ bilangan rasional, artinya terdapat p dan q bilangan bulat, $q \neq 0$ sehingga

$$a + b = \frac{p}{q} \qquad (*)$$

Karena a bilangan rasional, maka terdapat s dan t bilangan bulat, $t \neq 0$ sehingga

$$a = \frac{s}{t} \qquad (**)$$

Substitusi (**) ke dalam satu (*), diperoleh

$$a + b = \frac{p}{q} \leftrightarrow b = \frac{p}{q} - \frac{s}{t} \leftrightarrow b = \frac{pt - qs}{qt}$$

Berdasarkan sifat tertutup operasi penjumlajahan dan perkalian bilangan bulat, terdapat u dan v bilangan bulat sehingga u = $pt - qs$ dan v = qt.

Dengan demikian diperoleh bahwa $b = \frac{u}{v}$, dengan u dan v bilangan bulat dan $v \neq 0$.

Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa b adalah bilangan irrasional (premis). ■

Contoh 2.7.

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

Jawab :

Andaikan $\sqrt{2}$ bilangan rasional, artinya terdapat p dan q bilangan bulat dan $q \neq 0$ dan diasumsikan bahwa FPB(p, q)= 1 (p dan q saling prima) sehingga

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Kuadratkan kedua ruas diperoleh,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \leftrightarrow p^2 = 2q^2 \qquad (*)$$

Akibatnya p^2 bilangan genap, berdasarkan contoh dimuka, p^2 berimplikasi p genap,

$P = 2\ k$, untuk suatu k bilangan bulat. (**)

Substitusi (**) ke dalam (*) diperoleh

$$2q^2 = p^2 \leftrightarrow 2q^2 = (2\ k)^2 \leftrightarrow 2q^2 = 4\ k^2 \leftrightarrow q^2 = 2\ k^2.$$

Akibatnya, q^2 bilangan genap yang berimplikasi pada q juga bilangan genap.

Dengan demikian diperoleh bahwa p dan q bilangan genap yang berakibat FPB(p, q) $\leq$ 2.

Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa p dan q yang dipilih saling prima.

Jadi, haruslah $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional. ■

2.4. Prinsip Induksi Matematika

Prinsip induksi matematika merupakan salah satu metoda atau alat yang digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan matematika, dalam hal ini khususnya pernyataan-pernyataan yang berkaitan dengan bilangan asli atau bilangan bulat positif.

Satu hal yang memudahkan kita bekerja dengan bilangan asli adalah himpunan bilangan asli mempunyai sifat yang terurut dengan baik (*well ordering*), yaitu jika S $\subseteq \mathbb{N}$ maka S mempunyai unsur terkecil. Maksudnya, setiap kita mempunyai suatu himpuan bagian dari $\mathbb{N}$ selalu bisa kita tentukan unsur yang paling kecil dari himpunan tersebut. Dengan kata lain, jika S $\subseteq \mathbb{N}$ dan S $\neq \phi$ maka terdapat $m \in$ S sehingga $m \leq k$

untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Sebagai contoh, misalkan S = { 5, 3, 6, 9, 8, 23, 45, 29, 199, 11, 2} maka unsur terkecil dari S adalah 2.

Induksi Matematika

Misalkan P(n) adalah pernyataan matematika yang berkaitan dengan n bilangan asli. Biasanya pernyataan P(n) berbentuk persamaan atau pertidaksamaan matematika.

Adapun prinsip induksi matematika meliputi prosedur berikut :

Jika 1. P(1) benar (hipotesa basis)

2. Jika P(k) benar (hipotesa induksi)

maka buktikan benar P(k+1) (langkah induksi)

Maka P(n) benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Pada kasus-kasus tertentu, hipotesa basis tidak selalu dimulai dari n = 1, tetapi kadangkala dimulai dari suatu bilangan tertentu (lebih besar dari satu) dan merupakan bilangan terkecil yang memenuhi pernyataan P(n). Oleh karena itu, secara umum prinsip induksi matematika di atas dapat perumum.

Prosedur induksi matematika secara umum :

Jika 1. P(k_0) benar , untuk suatu $k_0 \in \mathbb{N}$ (hipotesa basis)

2. Jika P(k) benar (hipotesa induksi)

maka buktikan benar P(k+1) (langkah induksi)

Maka P(n) benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq k_0$.

Contoh 2.8.

Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $1 + 2 + .. + n = ½\, n\, (n+1)$

Jawab :

Hipotesa basis : (n =1), 1 = 1 benar!

Hipotesa induksi : ($n = k$), $1 + 2 + .. + k = ½\, k\, (k+1)$

Langkah induksi : akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$

$1 + 2 + .. + k + (k+1) = ½\, k\, (k+1) + (k+1)$

$= (1/2\, k + 1)\, (k+1)$

$= ½\, (k+2)\, (k+1)$

$= ½\, (k+1)\, (k+2)$

Jadi, $1 + 2 + .. + n = ½\, n\, (n+1)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ■

Contoh 2.9.

Buktikan bahwa $n^3 \geq 6\, n^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq n_0$ untuk suatu $n_0 \in \mathbb{N}$.

Jawab :

Dengan pengujian biasa diperoleh $n_0 = 6$.

Hipotesa basis : (n = 6), 216 = 216 benar!

Hipotesa induksi : ($n = k$), $k^3 = 6\, k^2$

Langkah induksi : akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$

$(k+1)^3 = k^3 + 3\, k^2 + 3k + 1$

$\geq 6\, k^2 + 3\, k^2 + 3\, k + 1$

$\geq 6\, k^2 + 12\, k + 6$ (untuk $k \geq 6$, $3\, k^2 > 9\, k + 5$)

$= 6\, (k^2 + k + 1)$

$= 6\, (k+1)^2$

Jadi, $n^3 \geq 6\, n^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 6$. ■

Latihan

1. Buktikan kesamaan-kesamaan berikut dengan menggunakan prinsip induksi matematika !
   a. $1 + 4 + \cdots + (3n - 2) = n(3n - 1)/2$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   b. $1 + 3 + \cdots + n(n+1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   c. $1^2 + 2^2 + .. + n^2 = 1/6\,(n+1)(2n+1)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   d. $1^3 + 2^3 + .. + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   e. $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   f. $\dfrac{3}{1^2\times 2^2} + \dfrac{5}{2^2\times 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
2. Gunakan prinsip-prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketaksamaan-ketaksamaan berikut ini.
   a. $n < 2^n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   b. $2^n < 2n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   c. Jika $0 < a < b$ maka $a^n < b^n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
   d. $2^n < n!$, untuk setiap $n \geq 4$ dan $n \in \mathbb{N}$
   e. $n^2 - 6n + 2 \geq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq n_0$ (tentukan n_0 !)
   f. $2^n > n^3$, untuk setiap $n \geq 10$ dan $n \in \mathbb{N}$
   g. $2n - 3 \leq 2^{n-2}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq n_0$ (tentukan n_0 !)
   h. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, untuk setiap $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$
3. Gunakan prinsip-prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan-pernyataan berikut ini yang berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
   a. $n^3 + 5n$ habis dibagi 6
   b. $15^n - 6^n$ habis dibagi 9
   c. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ habis dibagi 7
   d. $n^3 - n$ habis dibagi 6

4. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $n\,(n + 1)$ adalah bilangan genap!
5. Buktikan bahwa perkalian tiga bilangan asli berurutan habis dibagi 3!

BAB III
HIMPUNAN I

3.1. Himpunan

3.1.1. Pendahuluan Himpunan

Dalam kehidupan sehari-hari, kegiatan mengumpulkan atau mengkoleksi suatu benda atau obyek tertentu merupakan hal yang lumrah dilakukan. Kegiatan mengumpulkan atau mengkoleksi suatu benda atau obyek tertentu tersebut ada yang dilakukan dengan sengaja, rapi dan teratur tetapi kadangkala ada juga yang dilakukan tanpa memperhatikan aturan tertentu. Kumpulan benda atau obyek yang dikumpulkan dengan menggunakan aturan tertentu disebut sebagai himpunan benda atau obyek.

Definisi 3.1.

Himpunan adalah kumpulan dari benda-benda (obyek) yang terdefinisi dengan jelas (menggunakan aturan tertentu) sehingga dapat dibedakan apakah benda/obyek tersebut termasuk dalam kumpulan tersebut atau tidak.

Suatu himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kapital; A, B, X, Y atau yang lainnya dan benda atau obyek dalam suatu himpunan disebut anggota atau unsur, biasanya dinotasikan dengan huruf kecil, seperti *a*, *b*, *c*, *s*, *t* atau yang lainnya.

Jika x anggota dari suatu himpunan X, ditulis dengan

$$x \in \mathrm{X}$$

yang dibaca " x anggota X atau x dalam X". Sebaliknya, jika x bukan anggota dari suatu himpunan X, maka ditulis

$$x \notin \mathrm{X}$$

yang dibaca " x bukan anggota X".

Contoh 3.1

a. Misalkan A adalah himpunan yang terdiri atas huruf-huruf vokal, $A = \{a, i, u, e, o\}$ maka "$a \in$ A" tetapi " $x \notin$ A ".

b. Jika G adalah himpunan bilangan genap maka $4 \in G$ tetapi $15 \notin G$.

c. Jika T adalah himpunan segitiga dan A adalah segitiga sama kaki maka $A \in T$, tetapi jika B adalah lingkaran maka $B \notin T$.

Secara umum, terdapat tiga cara mendeskripsikan suatu himpunan, yaitu :

1. Mendaftarkan semua anggotanya,

   Sebagai contoh,

   A = { 1, 2, 3, 4, 5}

   B = { 4, 5, 1, 6, 7, 10}

   C = { *a*, *b*, *c*}

   Cara di atas dapat dilakukan, jika anggota dari himpunan yang dimaksud berhingga dan sedikit tetapi jika anggota dari himpunan yang dimaksud banyak bahkan tak hingga banyaknya, maka penulisan seperti cara di atas masih dapat dilakukan dengan menambahkan titik-titik “ $\cdots$ “ yang menyatakan seterusnya sesuai dengan pola yang ada sebelumnya, sebagai contoh :

   P = { 2, 3, 4, 5, $\cdots$, 20}

   Q = { 4, 6, 8, 10, 12, $\cdots$}

   Himpunan P menyatakan himpunan yang beranggotakan bilangan asli mulai dari 2 sampai dengan 20 dan himpunan Q merupakan himpunan bilangan genap yang lebih besar dari 2 .

2. Menyatakan deskripsi, karakteristik atau sifat-sifat yang dipenuhi oleh anggota himpunan.

   Penulisan himpunan dengan cara ini contohnya sebagai berikut ini.

   A adalah himpunan anggota DPR RI dari fraksi Golkar.

   B adalah himpunan semua bilangan prima yang lebih dari 2 dan kurang dari 100.

   C adalah hinpunan mahasiswa Program Studi Matematika Universitas Mataram.

   dan sebagainya.

3. Menggunakan notasi pembentuk himpunan

   Cara ini dilakukan dengan memberikan aturan yang dapat membedakan suatu obyek apakah termasuk anggota suatu himpunan atau tidak, contohnya :

S = { x | $x \in \mathbb{Z}$ dan $x \geq 5$}

T = { y | $0 \leq y \leq 10$ dan $y \in \mathbb{Z}$ }

U = { z | z solusi dari $z^2 - 2z - 3 = 0$ dan $z \in \mathbb{Z}$ }

Masing-masing contoh di atas dapat juga ditulis sebagai berikut :

S = { $x \in \mathbb{Z}$ | $x \geq 5$}

T = { $y \in \mathbb{Z}$ | $0 \leq y \leq 10$ }

U = { $z \in \mathbb{Z}$ | z solusi dari $z^2 - 2z - 3 = 0$ }

Beberapa himpunan bilangan dan notasinya yang akan sering dijumpai dalam perkuliahan matematika adalah sebagai berikut:

$\mathbb{N}$ = { 1, 2, 3, $\cdots$ } adalah himpunan bilangan asli

$\mathbb{Z}$ = { $\cdots$, - 3, - 2, -1, 0, 1, 2, 3, $\cdots$ } adalah himpunan bilangan bulat

$\mathbb{Q} = \{ c \mid c = \frac{a}{b}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ = { x | x adalah bilangan riil}

$\mathbb{C}$ = { z | $z = a + i\,b$; a, b $\in \mathbb{R}$ dan $i^2 = -1$}

Latihan

1. Diantara pernyataan berikut ini, manakah yang merukan himpunan?
   a. Kumpulan orang miskin di Mataram
   b. Kumpulan anak-anak pintar
   c. Kumpulan mahasiswa Matematika
   d. Kumpulan warga negara asing di NTB
   e. Kumpulan abjat dalam alphabet
   f. Kumpulan mata kuliah Program Studi Matematika Universitas Mataram
   g. Kumpulan tanaman yang berumbi
2. Tulislah himpunan –himpunan berikut dengan menggunakan simbol yang tepat.
   a. *a* anggota A
   b. *a* bukan anggota B
   c. – 2 bukan anggota himpunan bilangan asli

3. Nyatakan himpunan berikut dengan menggunakan karakteristik atau sifat yang dipenuhi oleh anggotanya.
   a. $P = \{ x \mid 0 \leq x \leq 10 \text{ dan } x \in \mathbb{Z}\}$
   b. $Q = \{ a, i, u, e, o\}$
   c. $R = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2n - 1 \text{dan } n \in \mathbb{N} \}$
   d. $S = \{ k \mid$ faktor dari k adalah 1 dan k }
4. Daftarlah masing-masing anggota dari himpunan-himpunan pada soal nomor 3.
   a. $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2n - 1, n \leq 15 \text{ dan } n \in \mathbb{N} \}$
   b. $B = \{ k \in \mathbb{Z} \mid$ faktor dari k adalah 1 dan k serta $k \leq 25\}$
   c. $C = \{ z \in \mathbb{Z} \mid z - 3 = 5\}$
   d. $D = \{a \mid a^2 + 5a + 6 = 0\}$
   e. E adalah nama-nama kabupaten/kota di Provinsi NTB
5. Tulislah himpunan-himpunan berikut dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan
   a. K adalah himpunan kuadrat suatu bilangan asli
   b. L = {1, 2, 8, 16, 32, 64, 128}
   c. $M = \{ a, b, c, \cdots , z\}$
   d. N adalah kumpulan mahasiswa Program Studi Matematika Universitas Mataram
6. Manakah diantara himpunan-himpunan berikut yang termasuk himpunan kosong?
   a. Himpunan manusia yang berumur lebih dari 200 tahun
   b. Himpunan segitiga yang semua sudutnya tumpul.
   c. $A = \{ \phi \}$
   d. $B = \{ x \mid x$ adalah kucing berkaki 10}
   e. $C = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y^2 + 1 = 0\}$
7. Tentukan semesta pembicaraan untuk masing-masing himpunan berikut
   a. $Q = \{ a, i, u, e, o\}$
   b. K adalah himpunan kuadrat suatu bilangan asli
   c. {logika dan himpunan, matematika dasar 1, analisis real, analisis kompleks, aljabar linier, geometri}

3.1.2 Hubungan Antara Himpunan

Definisi 3.2

Himpunan A disebut himpunan bagian atau subset dari himpunan B, dinotasikan A $\subseteq$ B, jika setiap anggota A juga merupakan anggota B,

$$\forall x \in A, x \in B \quad \text{atau} \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

Relasi $\subseteq$ disebut juga sebagi relasi inklusi

Pada beberapa buku, himpunan bagian dinotasikan "$\subset$", pada buku ini tanda "$\subset$" menyatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*). Dalam hal ini, lambang "A $\subset$ B" berarti setiap anggota A adalah anggota B tetapi ada anggota B yang bukan merupakan anggota A.

Catatan : Perhatikan perbedaan antara " $\in$ " dan " $\subseteq$ ".

Jika A = {1, 2, 3} maka 1 $\in$ A bukan 1 $\not\subset$ A dan sebaliknya {1} $\notin$ A melainkan {1} $\subseteq$ A.

Jika $\mathfrak{A}$ = { 1, {1}, {1, 2}, 2, 3} maka 1 $\in$ $\mathfrak{A}$ dan {1} $\in$ $\mathfrak{A}$ tetapi 1 $\neq$ {1}.

Contoh 3.2

a. Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ maka B $= \{4, 6, 7, 9\} \subseteq$ A dan A $\subseteq$ A tetapi C $= \{4, 6, 7, 10\} \not\subset$ A. Kenapa?

b. Jika T = { *a*, *b*, *c*, *d*} maka P = { *b*, *c*, *d*} dan Q = { *b*, *a*, *c*}merupakan subset dari T tetapi R = { *a*, *b*, *c*, *d*, *e*}$\not\subset$ T.

Himpunan yang tidak memiliki anggota disebut himpunan kosong, yang dinotasikan dengan ϕ atau { }. Tetapi P = { ϕ } bukan merupakan himpunan kosong, sebab P memiliki anggota yaitu himpunan kosong itu sendiri.

Teorema 3.1

Himpunan kosong ϕ merupakan subset dari setiap himpunan.

Bukti. Misalkan A sebarang himpunan dan $x \in \phi$. Akibatnya $x \in$ A. Jadi, $\phi \subseteq$ A. ■

catatan : Penarikan kesimpulan ini sahih, berdasarkan definisi implikasi, jika hipotesa salah apapun kesimpulan yang diambil selalu bernilai benar, dalam hal ini hipotesa bahwa $x \in \phi$ mustahil karena ϕ tidak punya anggota sehingga menarik kesimpulan apapun termasuk $x \in$ A akan selalu bernilai benar.

Definisi 3.3

Dua buah himpunan A dan B dikatakan sama, ditulis A = B, jika berlaku sifat A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ A, yaitu :

$$A = B \quad \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Contoh 3.3

a. Jika A = { 1, 2, 3} dan B = { 2, 3, 1} maka A = B. Kenapa?
b. Jika P = { x | x solusi dari $x^2 = 1$} dan Q = { -1, 1} maka A = B. Kenapa?
c. Jika M = {a, b, c} dan N = {c, d, e} maka M $\neq$ N. Kenapa?

3.1.3. Himpunan Finit dan Infinit

Definisi 3.4

Himpunan M dikatakan finit, jika M = ϕ atau jika terdapat bilangan asli n sehingga anggota dari M dapat diurutkan dengan indeks 1, 2, 3, $\cdots$, n atau dengan kata lain setiap anggota M berkorespodensi satu-satu dengan bilangan 1, 2, 3, $\cdots$,n. Jika tidak, M disebut himpunan infinit.

Contoh 3.4

a. P = { a, b, c, $\cdots$, z} merupakan himpunan finit, sebab kita dapat memasangkan anggota P dengan bilangan asli dari 1 sampai 26, yaitu a dengan 1, b dengan 2, c dengan 3 dan seterusnya sampai z dengan 26.
b. Q adalah himpunan solusi dari $x^2 = -1$ merupakan himpunan finit, sebab Q = ϕ
c. Himpunan bilangan ganjil adalah infinit
d. Himpunan $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ merupakan himpunan infinit.

Latihan

1. Misalkan A = { 1, 2, 3, 4, 5}. Daftarkan semua subset dari A yang banyak anggotanya 2 dan 3.
2. Misalkan A = { 1, 2, 3, 4, 5}.
   a. Daftarkan semua subset dari A yang anggotanya terdapat 2 dan 3.
   b. Daftarkan semua subset dari A yang anggotanya terdapat 2 atau 3.
3. Misalkan B = {*a*, *b*, *c*, *d*}. Daftarkan semua subset dari B dan *proper* subset dari B!
4. Misalkan P himpunan sebarang. Apakah P selalu mempunyai subset? jelaskan !
5. Buktikan
   a. Jika A himpunan bagian dari ϕ maka A = ϕ
   b. Jika P = {2, 3, 5, 7, 11, 13} dan Q adalah himpunan bilangan ganjil maka P bukan subset dari Q
   c. $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$
   d. $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ dan $C \subseteq A$ maka A = C
6. Diantara himpunan berikut ini manakah himpunan yang sama?

   $A = \{ x \in \square \mid 0 < x < 5 \}$

   B = { 1, 2, 3, 4, 5}

   $C = \{ y \in \square \mid 1 \leq y \leq 4\}$

   D adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 6

   E = { 2, 4, 1, 3, 5}

   F = { 4, 3, 2, 1}

   G = {1, 1, 3, 2, 4}
7. Manakah himpunan berikut ini yang termasuk himpunan finit?
   a. P = {*n* | *n* bilangan prima}
   b. $Q = \{ x \in \mathbb{N} \mid x$ adalah kelipatan dari 2 dan $x \leq 1.111.111.111.111\}$
   c. R himpunan bulu kuda se Kota Mataram
   d. S adalah himpunan manusia yang tinggal di Bumi
   e. T adalah himpunan bilangan riil antara 0 sampai 1
   f. U adalah himpunan garis yang dibuat melalui sebuah titik
   g. $V = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid$ jarak v dari titik asal adalah 1 atau $|v| = 1\}$

3.2. Operasi Himpunan

Definisi 3.5

Misalkan A dan B dua himpunan sebarang.

1. **Operasi Gabungan**

   Gabungan himpunan A dan B, dinotasikan A $\cup$ B adalah himpunan semua unsur yang termasuk anggota A atau anggota B,

   $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

2. **Operasi Irisan**

   Irisan himpunan A dan B, dinotasikan A $\cap$ B adalah himpunan semua unsur yang termasuk anggota A dan anggota B,

   $$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

   Jika $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \phi$ maka A dan B dikatakan *disjoint* atau saling lepas.

3. **Operasi Kompelemen**

   Misalkan S himpunan semesta pembicaraan dan A $\subseteq$ S. Komplemen dari A, dinotasikan A^c adalah himpunan semua anggota S yang bukan merupakan anggota A,

4. **Operasi Selisih / Komplemen relatif**

   Selisih dari himpunan A dan himpunan B dinotasikan dengan **A\ B** atau **A – B** adalah himpunan semua anggota A tetapi bukan anggota B,

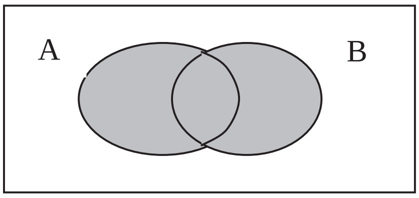
   $$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

5. **Operasi Jumlah**

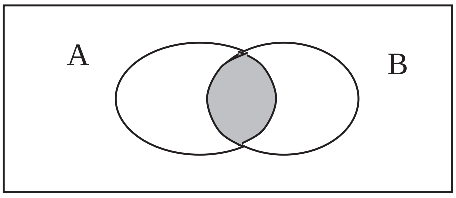
   Jumlah dua himpunan A dan B dinotasikan dengan A + B adalah himpunan semua anggota A atau B tetapi bukan anggota persekutuan A dan B,

   $$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \text{ dan } \mathrm{x} \notin (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\}$$

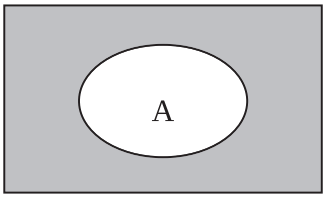
Untuk masing-masing definisi operasi himpunan di atas dengan menggunakan diagram Venn dapat digambarkan sebagai berikut, dimana daerah yang diarsir menyatakan hasil dari operasi himpunan yang dilakukan.



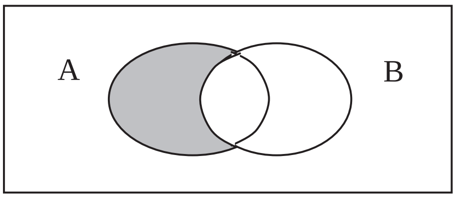
$A \cup B$



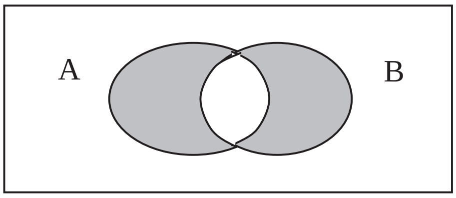
$A \cap B$



A^{C}



A - B



A + B

Contoh 3.5

Misalkan $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \le x \le 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, dan

$B = \{ y \in \mathbb{N} \mid y$ bilangan prima kurang dari $9\} = \{ 2, 3, 5, 7\}$

Maka

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$A \cap B = \{2, 3, 5\}$

$A^c = \{ \cdots , -2, -1\} \cup \{6, 7, 8, \cdots \}$

$B^c = \{ 1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, \cdots \}$

$A - B = \{0, 1, 4\}$

$B - A = \{ 7 \}$

$A + B = \{0, 1, 4, 7\}$

Sifat-sifat Operasi Himpunan

Misalkan A, B, C sebarang himpunan tak kosong dan S himpunan semesta, maka beberapa hukum berikut berlaku :

1. Hukum Idempoten
   a. $A \cup A = A$
   b. $A \cap A = A$
2. Hukum Assosiatif
   a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Hukum Komutatif
   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$
4. Hukum Distributif
   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
5. Hukum Identitas
   a. $A \cup \phi = A$
   b. $A \cup S = S$
   c. $A \cap S = A$
   d. $A \cap \phi = \phi$
6. Hukum Komplemen
   a. $A \cup A^c = S$
   b. $(A^c)^c = A$
   c. $A \cap A^c = \phi$
   d. $S^c = \phi$ dan $\phi^c = S$
7. Hukum De Morgan
   a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Latihan

1. Misalkan A dan B himpunan sebarang. Gunakan diagram Venn untuk menggambarkan $A \cup B$ dan $A \cap B$ untuk setiap relasi antara A dan B berikut ini.
   a. $A \cap B \neq \phi$
   b. $A \cap B = \phi$
   c. $A \subseteq B$
   d. $B \subseteq A$
   e. $A = B$
2. Jika diketahui $P = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{ x \mid x$ bilangan prima kurang dari $15\}$dan $R = \{ y \mid y = 2n, n \leq 8$ dan $n \in \mathbb{N} \}$. Tentukan :
   a. $P \cup Q$
   b. $R \cap Q$
   c. $P + (Q \cup R)$
   d. $(P \cap Q) - Q$
   e. P^C, jika $S = P \cup Q \cup R$
3. Diberikan A, B dan C himpunan sebarang. Buktikan bahwa :
   a. $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$
   b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ dan $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Diberikan A dan B himpunan sebarang. Buktikan bahwa :
   a. $A \subseteq (A \cup B)$
   b. $(A \cap B) \subseteq A$
   c. $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
   d. $A = (A \cup A)$ dan $A = (A \cap A)$
   e. $A \cup S = S$
   f. $A \cup \phi = A$
   g. $A \cap \phi = \phi$
5. Buktikan bahwa
   a. jika $A \cup B = \phi$ maka $A = \phi$ dan $B = \phi$
   b. jika $A \cap B = \phi$ maka $A = \phi$ atau $B = \phi$

3.4. Himpunan Kuasa

Definisi 3.6

Jika A sebarang himpunan maka $\mathcal{F}(A) = \{ B \mid B \subseteq A\}$ disebut himpunan kuasa dari A, yaitu himpunan semua subset dari A.

Himpunan kuasa dari A dinotasikan dengan 2^A.

Contoh 3.6

a. Jika A = ϕ maka $2^A = \{ \phi \}$, sebab subset dari ϕ hanya ϕ
b. Jika B = {1} maka $2^B = \{ \phi , \{1\}\}$
c. jika C = {1, 2} maka $2^C = \{ \phi , \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
d. Jika D = {1, 2, 3} maka $2^D = \{ \phi , \{1\}, \{2\}, \{3\},\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Jika kita perhatikan pola jumlah anggota himpunan kuasa pada masing-masing himpunan di atas, terlihat bahwa himpunan yang jumlah anggotanya berturut-turut 0, 1, 2, dan 3 memiliki himpunan kuasa dengan jumlah anggota berturut-turut 1, 2, 4, dan 8. Hal serupa kalau kita teruskan untuk himpunan yang jumlah anggotanya 4 akan diperoleh jumlah anggota himpunan kuasanya 16 (perlihatkan!) dan seterusnya untuk himpunan yang jumlah anggotanya *n* akan memberikan himpunan kuasa dengan jumlah anggota sebanyak 2^n.

Latihan

1. Tulislah himpunan kuasa dari masing-masing himpunan berikut :
   a. $A = \{ 1, 2, a\}$
   b. $B = \{ 1, \{1\}, \{1, 2\}\}$
   c. $C = \{ a, b, c\}$
   d. $D = \{\phi , \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$
2. Benar atau salahkah pernyataan-pernyataan berikut, jika P = { 1, 2, 3, 4, 5}
   a. $\phi \in P$
   b. $\phi \subseteq P$
   c. $\{1\} \in P$

d. $\{1, 2, 3\} \subseteq P$

e. $\{\{1, 2, 3\}\} \subseteq P$

f. Banyaknya anggota 2^P adalah 32

3. Jika $Q = \{1, \{2, 3\}, 2, 3, \phi\}$, maka manakah diantara pernyataan berikut yang benar?

   a. $\{1, 2\} \subseteq Q$

   b. $\{2, 3\} \subseteq Q$

   c. $\{2, 3\} \in Q$

   d. $\phi \subseteq Q$

   e. $\phi \in Q$

   f. $\{2, 3, \{2, 3\}\}$ adalah anggota 2^Q

   g. Banyaknya anggota 2^Q adalah 32

   h. Banyaknya anggota 2^Q adalah 2^6

4. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa banyaknya anggota 2^A adalah 2^n, jika banyaknya anggota A adalah n unsur.

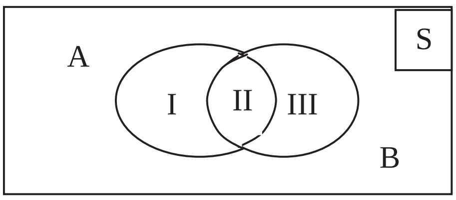
3.4. Aplikasi Himpunan dan Diagram Venn

Pengetahuan kita tentang himpunan dan diagram Venn sangat berguna khususnya dalam menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan obyek-obyek dari himpunan yang bersekutu (*over lapping sets*).

Sebagai ilustrasi, misalkan A dan B himpunan sebarang dengan $n(A) = p$, $n(B) = q$ dan $n(A \cap B) = x$. Perhatikan diagram Venn untuk $A \cup B$ dan pembagian daerah I, II dan III.

Akibatnya

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(I) + n(II) + n(III) \\ &= (p - x) + x + (q - x) \\ &= p + q - x \end{aligned}$$



dengan demikian dapat berlaku hubungan :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dengan cara serupa, untuk sebarang A, B dan C himpunan berlaku

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) + n(C) – n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Contoh 3.7.

Dari 80 mahasiswa, 46 mahasiswa memprogramkan matakuliah matematika dan 53 mahasiswa memprogramkan matakuliah Fisika serta 38 mahasiswa memprogramkan kedua matakuliah tersebut.

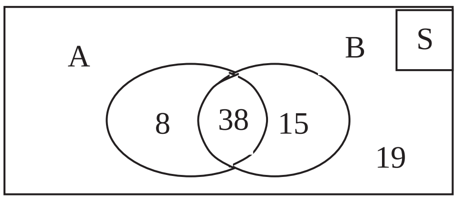
a. Berapa mahasiswa yang memprogramkan matakuliah matematika saja?
b. Berapa mahasiswa yang memprogramkan matakuliah fisika saja?
c. Berapa mahasiswa yang memprogramkan matakuliah matematika atau fisika?
d. Berapa mahasiswa yang tidak memprogramkan kedua matakuliah tersebut?

Jawab :

Misalkan A = Himpunan mahasiswa yang memprogramkan matakuliah matematika

B = Himpunan mahasiswa yang memprogramkan matakuliah fisika

Diketahui bahwa n(S) = 80, n(A) = 46, n(B) = 53 dan $n(A \cap B) = 38$. Dengan menggunakan diagram Venn hubungan di atas dapat digambarkan sebagi berikut :



Jadi,

a. Banyaknya mahasiswa yang memprogramkan matakuliah matematika saja adalah 8 orang.
b. Banyaknya mahasiswa yang memprogramkan matakuliah fisika saja adalah 15 orang.
c. Banyaknya mahasiswa yang memprogramkan kedua matakuliah matematika atau fisika adalah 61 orang.
d. Banyaknya mahasiswa yang tidak memprogramkan kedua matakuliah matematika dan fisika adalah 19 orang.

Contoh 3.8.

Pada suatu kelompok penggemar olah raga terdiri atas 45 orang, 14 orang menyukai bulutangkis, 15 menyukai tenis lapangan dan 12 orang menyukai tenis meja. 10 orang menyukai bulutangkis sekaligus tenis lapangan, 5 orang menyukai tenis lapangan dan tenis meja serta 6 orang menyukai bulutangkis dan tenis meja. 3 orang diantara mereka menyukai ketiga jenis olah raga tersebut.

a. Berapa orangkah yang menyukai bulutangkis atau tenis lapangan atau tenis meja?
b. Berapa orangkah yang tidak menyukai ketiga jenis olah raga tersebut?

Jawab:

Misalkan A = Himpunan orang yang menyukai bulutangkis
B = Himpunan orang yang menyukai tenis lapangan
C = Himpunan orang yang menyukai tenis meja

Diketahui bahwa $n(S) = 45$, $n(A) = 14$, $n(B) = 15$, $n(C) = 12$, $n(A \cap B) = 10$, $n(B \cap C) = 5$, $n(A \cap C) = 6$ dan $n(A \cap B \cap C) = 3$.

Jadi,

a. $n(A \cup B \cup C) = 14 + 15 + 12 - 10 - 5 - 6 + 3 = 23$ sehingga banyaknya anggota kelompok yang menyukai bulutangkis atau tenis lapangan atau tenis meja adalah 23 orang.
b. Banyaknya anggota kelompok yang tidak menyukai ketiga jenis olah raga tersebut adalah $45 - 23 = 22$ orang.

Latihan

1. Disuatu kelas terdiri atas 75 mahasiswa, 47 orang mempunyai radio, 18 orang mempunyai televisi, dan 39 orang mempunyai tape recorder. 10 orang mempunyai radio dan pesawat televisi, 12 orang mempunyai pesawat televisi dan tape recorder, 30 orang mempunyai radio dan tape recorder serta 6 orang mempunyai ketiga barang tersebut.
   a. Berapa mahasiswa yang hanya mempunyai televisi?
   b. Berapa mahasiswa yang hanya mempunyai tape recorder?

c. Berapa mahasiswa yang mempunyai radio dan tape recorder tetapi tidak mempunyai televisi?
d. Berapa mahasiswa yang hanya mempunyai salah satu macam barang saja dari ketiga macam barang yang ada?

2. Dilakukan survey terhadap 400 pengguna *hand phone* (HP). 200 orang menggunakan merk nokia, 290 orang menggunakan merk samsung dan 260 orang menggunakan merk siemen. 150 orang menggunakan merk nokia dan samsung, 200 orang menggunakan merk samsung dan siemen, 100 orang menggunakan nokia dan siemen serta 70 orang menggunakan ketiga merk tersebut.
   a. Berapa orang yang menggunakan HP bermerk nokia atau samsung?
   b. Berapa orang yang menggunakan HP bermerk nokia atau siemen?
   c. Berapa orang yang menggunakan HP bermerk samsung saja?
   d. Berapa orang yang tidak menggunakan satupun dari ketiga merk tersebut?.
   e. Berapa orang yang hanya menggunakan salah satu dari ketiga merk tersebut?
   f. Berapa orang yang menggunakan HP bermerk nokia atau samsung atau siemen?

BAB IV
HUBUNGAN ANTARA LOGIKA DAN HIMPUNAN

4.1. Diagram Venn untuk Himpunan dan Penyataan

Dalam kehidupan sehari-hari dan menggunakan logika, seringkali kita menggunakan pernyataan yang melibatkan atau membicarakan kumpulan-kumpulan obyek tertentu. Oleh karenanya, kita dapat memanfaatkan teori himpunan dalam menginterpretasikan suatu pernyataan atau menyelesaikan permasalahan logika, termasuk dalam hal ini adalah menentukan validitas suatu argumen. Kelebihan dari pernyataan verbal yang diterjemahkan kedalam bahasa himpunan (pernyataan yang ekivalen) adalah pernyataan tersebut dapat diilustrasikan dengan menggunakan diagram Venn.

Perhatikan contoh-contoh berikut :

Contoh 4.1

"Adit senang bermain mobil-mobilan dan bermain sepak bola".

Pernyataan di atas, dapat dinyatakan dalam bahasa himpunan sebagai berikut,

"Adit adalah anggota himpunan orang-orang yang senang bermain mobil-mobilan dan anggota himpunan orang-orang yang senang bermain sepak bola".

atau,

"Adit adalah anggota himpunan orang-orang yang senang bermain mobil-mobilan dan bermain sepak bola".

Dalam notasi himpunan dapat ditulis,

Adit $\in$ {x | x senang bermain mobil-mobilan} dan Adit $\in$ {y | y senang bermain sepak bola} atau,

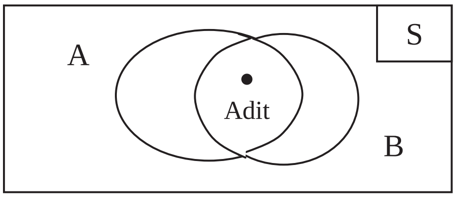
Adit $\in$ {x | x senang bermain mobil-mobilan dan sepak bola}

Pernyataan tersebut dengan menggunakan diagram Venn adalah sebagai berikut :

Misalkan semesta S himpunan orang,

A himpunan orang yang senang bermain mobil-mobilan.

B himpunan orang yang senang bermain sepak bola



Contoh 4.2

"Ahmad adalah mahasiswa yang rajin atau mahasiswa yang suka bolos".

Pernyataan di atas ekvalen dengan,

"Ahmad adalah anggota himpunan mahasiswa yang rajin atau anggota himpunan mahasiswa yang suka bolos", atau

Ahmad $\in$ {x | x mahasiswa yang rajin}atau Ahmad $\in$ {x | x mahasiswa yang suka bolos}, atau

Ahmad $\in$ {x | x mahasiswa yang rajin atau suka bolos}

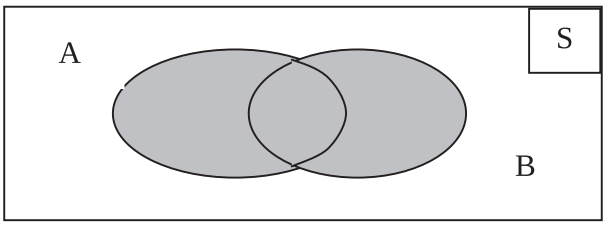
Dengan diagram Venn dapat dinyatakan dengan

Misalkan S = Himpunan mahasiswa

A = himpunan mahasiswa yang rajin

B = himpunan mahsiswa yang suka bolos

Maka posisi Ahmad $\in$ {x | x mahasiswa yang rajin atau suka bolos} pada diagram Venn bisa berada dimana saja pada daerah yang diarsir dalam diagram Venn di bawah ini.



Contoh 4.3

"Rizal tidak senang belajar matematika"

Pernyataan di atas ekvalen dengan,

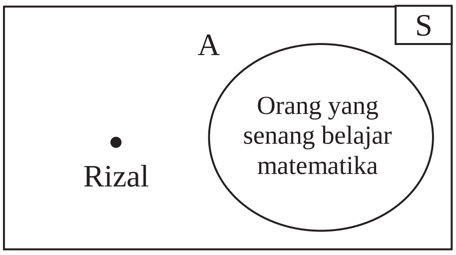
“Rizal bukan termasuk anggota himpunan orang-orang yang senang belajar matematika”, atau

$$\text{Rizal} \notin \{x \mid x \text{ senang belajar matematika}\}$$

Dengan diagram Venn dapat dinyatakan dengan

Misalkan S = himpunan orang

A = himpunan orang-orang yang senang belajar matematika



Contoh 4.4

“Tidak ada mahasiswa matematika yang menyontek”

Pernyataan ini ekivalen dengan mengatakan bahwa “himpunan mahasiswa matematika tidak mempunyai anggota yang suka menyontek”, atau

“Himpunan mahasiswa matematika tidak mempunyai anggota persekutuan dengan himpunan orang yang suka menyontek”.

Dalam notasi himpunan dapat ditulis,

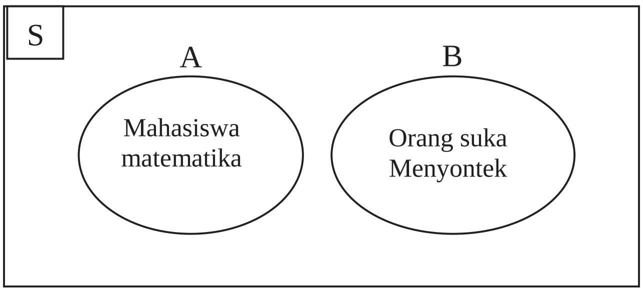
$$\{x \mid x \text{ mahasiswa matematika}\} \cap \{y \mid y \text{ suka menyontek}\} = \phi$$

Dengan diagram Venn dapat dinyatakan dengan

Misalkan S = himpunan orang

A = himpunan mahasiswa matematika

B = himpunan orang yang suka menyontek



Contoh 4.5

"Beberapa dosen bergelar doktor"

Pernyataan ini ekivalen dengan menyatakan bahwa "himpunan dosen paling sedikit mempunyai satu anggota yang bergelar doktor", atau

"Himpunan dosen paling sedikit satu empunyai anggota persekutuan dengan himpunan orang-orang yang bergelar doktor".

Dalam notasi himpunan dapat ditulis,

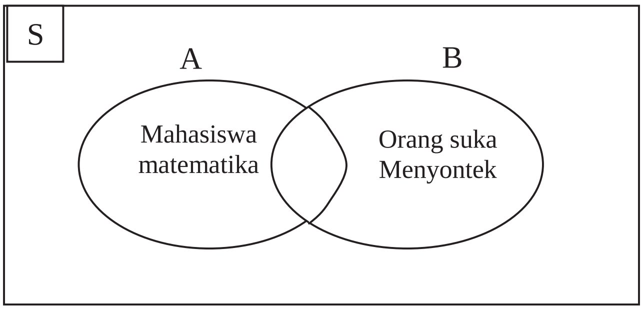
$$\{x \mid x \text{ dosen}\} \cap \{y \mid y \text{ bergelar doktor}\} \neq \phi$$

Dengan diagram Venn dapat dinyatakan dengan

Misalkan S = himpunan orang

A = himpunan dosen

B = himpunan orang yang bergelar doktor



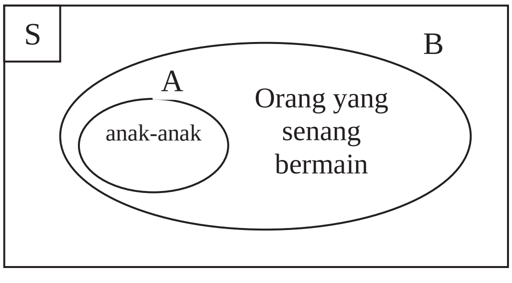
Contoh 4.6

"Semua anak-anak senang bermain"

Pernyataan ini dapat diartikan sebagai "himpunan anak-anak termasuk dalam himpunan orang-orang yang suka bermain", atau

Jika A adalah himpunan anak-anak dan B adalah himpunan orang yang suka bermain maka $A \subseteq B$.

Dengan diagram Venn dapat dinyatakan sebagai berikut



Latihan

1. Ubahlah setiap pernyataan berikut ke dalam bahasa himpunan dan gambarkan diagram Venn yang tepat untuk pernytaan tersebut. (Kemungkinan akan ada lebih dari satu cara dalam transformasi tersebut dan penetapan himpunan semestanya dan coba anda gambarkan bentuk diagram Venn untuk masing-masing transformasi tersebut!)
   a. Tidak ada singa yang tega makan anaknya.
   b. Beberapa orang yang datang keacara tersebut saya kenal.
   c. Sepeda itu bukan POLYGON.
   d. Matematika matakuliah yang perlu ketepatan dan ketat sifatnya.
   e. Setiap harimau makan daging dan setiap binatang pemakan daging adalah buas.
   f. Beberap penjahat baik hati dan setiap orang baik hati disayang oleh banyak orang.
   g. Setiap bilangan prima adalah ganjil kecuali 2.
   h. Setiap orang yang berbohong adalah pintar dan beberapa orang pintar jujur.
   i. Ada manusia yang beriman dan tidak tergoda oleh gemelapnya dunia.
2. Tentukan pernyataan yang ekivalen dengan pernyataan dibawah ini, dengan terlebih dahulu menggambarkan diagram Venn untuk pernyataan semula.
   a. Adit adalah seorang atlit dan seorang da’i.
   b. Saya termasuk orang jujur.
   c. Jika Arif anak matematika maka ia anak pintar.
   d. Adit adalah profesor yang pintar dan baik hati.

4.2. Aplikasi Teori Himpunan pada Argumen

Sebelumnya kita telah menterjemahkan pernyataan verbal kedalam pernyataan himpunan dan kemudian diilustrasikan dengan diagram Venn. Pada bagian ini kita akan menterjemahkan pernyataan-pernyataan yang termasuk dalam bagian hipotesis dan kesimpulan dari suatu argumen. Selanjutnya dengan diagram Venn akan dilihat apakah penarikan kesimpulan dari beberapa hipotesis yang ada sahih atau tidak.

Perhatikan contoh argumen berikut ini.

Contoh 4.7

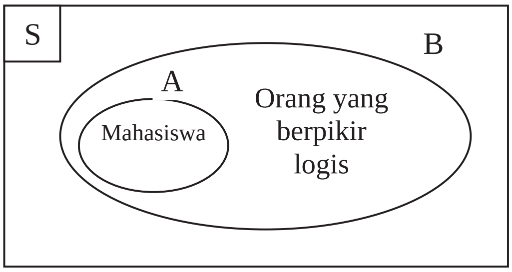
Mahasiswa adalah generasi yang mewakili orang-orang yang berpikiran logis. Tidak seorang pun yang tidak percaya diri mampu menjadi seorang pemimpin yang baik. Pemimpin yang baik adalah orang yang berpikir logis. Oleh karena, Mahasiswa adalah pemimpin yang baik.

Dengan menggunakan diagram Venn, apakah argumen di atas Valid?

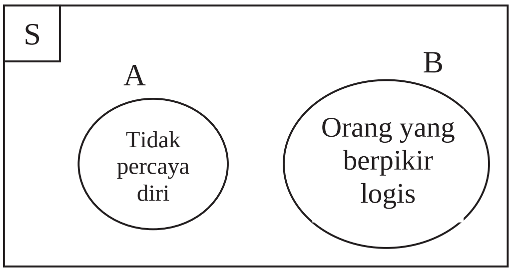
Jawab :

Dalam bahasa himpunan, masing-masing premis dan kesimpulan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut :

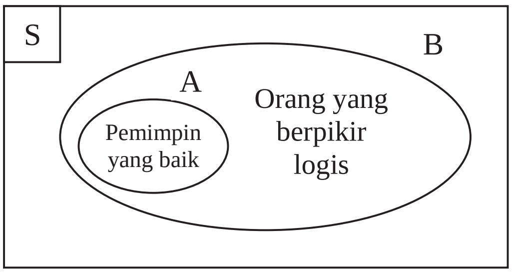
Premis 1. Himpunan mahasiswa adalah himpunan bagian dari himpunan orang yang berpikiran logis,



Premis 2. Himpunan orang yang tidak percaya diri (A) dan himpunan pemimpin yang baik (B) saling lepas

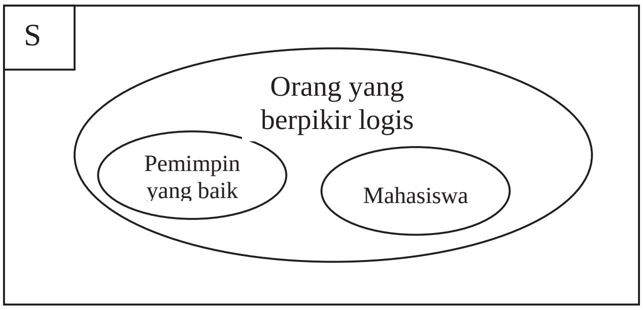


Premis 3. Himpunan pemimpin yang baik adalah subset dari himpunan orang-orang yang berpikir logis,

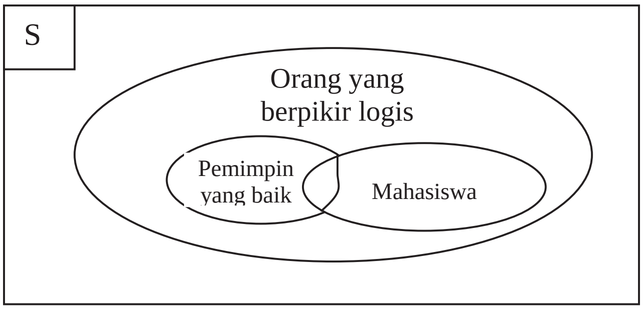


Berdasarkan premis-premis di atas, maka ada dua diagram diagram Venn yang mungkin sebagai kesimpulannya, yaitu :

(i)



(ii)



Berdasarkan diagram Venn (i), dapat disimpulkan bahwa mahasiswa adalah orang yang berpikir logis tetapi bukan pemimpin yang baik. Sedangkan berdasarkan diagram Venn (ii), dapat disimpulkan bahwa mahasiswa adalah orang yang berpikir logis dan dapat menjadi pemimpin yang baik.

Dengan demikian, penarikan kesimpulan pada argumen di atas tidak sahih.

Latihan

1. Tentukan validitas dari argumen-argumen berikut ini.
    a. Semua ikan bisa berenang. Adi tidak bisa berenang. Oleh karenanya, Adi bukan ikan.
    b. Beberapa hewan dapat berpikir. Manusia termasuk kelompok hewan. Jadi, manusia dapat berpikir.
    c. Beberapa mahasiswa malas belajar. Tidak ada orang kaya yang menjadi mahasiswa. Oleh karenanya, orang yang malas belajar tidak kaya.

d. Semua orang memegang prinsip hidupnya susah. Walaupun Ahmad seorang legislatif tetapi Ia tetap pegang teguh dengan prinsipnya. Oleh karenanya, Ahmad hidupnya susah.

e. Jika Budi berbohong maka Ia tidak disenangi oleh teman-temannya. Jika orang tidak disenangi maka Ia punya sedikit teman. Oleh karena itu, Budi mempunyai teman sedikit.

2. Tentukan kesimpulan dari sekumpulan premis yang diberikan oleh argumen-argumen berikut.

   a. Tidak mahasiswa matematika yang malas. Arif adalah seorang seniman. Semua seniman bergaya urak-urakan.

   b. Semua dokter adalah kaya. Seniman adalah orang yang berperasaan halus. Adit seorang dokter spesialis. Tidak ada orang yang berasaan halus yang kaya.

3. Tentukan validitas dari argumen berikut untuk masing-masing kesimpulan yang ditarik dengan menggunakan diagram Venn.

   a. Semua guru mempunyai kepribadian yang baik. Untuk mempunyai kepribadian yang baik, seseorang harus mampu berpikiran dewasa. Jika seseorang mampu berpikir rasional maka ia akan mampu berpikiran dewasa. Tidak ada pedagang yang berprofesi sebagai guru. Beberapa pedagang menjadi direktur suatu perusahaan. Oleh karena itu

      (i) Jika seseorang berpikir rasional maka ia berkepribadian baik.

      (ii) Jika Arif bukan seorang pedagang maka ia berpikir rasional

      (iii) Adit seorang direktur suatu perusahaan dan pasti ia seorang pedagang.

      (iv) Ahmad seorang guru dan ia pasti berpikir rasional

   b. Beberapa ahli filsafat adalah seorang matematikan. Matematikawan adalah seorang yang membosankan. Semua salesman (penjual) tidak membosankan. Beberapa guru menjadi penjual. Oleh karena itu

      (i) Beberapa orang guru tidak membosankan.

      (ii) Ada ahli filsafat yang berpenampilan menarik.

      (iii) Beberapa orang guru adalah matematikawan

      (iv) Ada penjual yang merupakan ahli filsafat.

4.3 Aplikasi Logika dalam Pembuktian Konsep-konsep Himpunan

Hubungan antara notasi himpunan dan simbol-simbol logika tampak sangat jelas. Sebagai contoh, $A \subseteq B$ didefinisikan sebagai setiap anggota A adalah anggota B juga, dengan simbol logika definisi tersebut dapat ditulis

$$\forall\, x \in A,\, x \in B$$

Penggunaan simbol-simbol logika khususnya dalam pembuktian konsep-konsep himpunan dapat menyederhanakan masalah sekaligus untuk menghindari kesalahan penafsiran atau makna karena menggunakan kalimat yang terlalu panjang.

Berikut beberapa contoh aplikasi logika dalam penbuktian konsep-konsep himpunan.

Contoh 4. 8

1. Himpunan kosong adalah subset dari sebarang himpunan
2. Misalkan A dan B himpunan sebarang. Buktikan
   a. jika $A \subseteq B$ maka $A \cup B = B$
   b. $A \cap B \subseteq A$

Jawab :

1. Misalkan A sebarang himpunan. Akan dibuktikan bahwa $\phi \subseteq A$.
   catatan : $\phi \subseteq A$. berarti $x \in \phi \rightarrow x \in A$.
   Dengan menggunakan konsep logika (implikasi) menyatakan bahwa jika hipotesis salah maka apapun kesimpulan yang diambil maka nila kebenaran dari implikasi selalu benar. Dengan modal ini, maka hukum di atas mudah untuk dibuktikan, yaitu:
   Ambil $x \in \phi$ maka dapat disimpulkan bahwa $x \in A$. Jadi, $\phi \subseteq A$. ■

   Ingat : $x \in \phi$ suatu pernyataan salah sehingga kesimpulan $x \in A$ adalah benar

2. a. pernyataan : jika $A \subseteq B$ maka $A \cup B = B$
   hipotesis : $A \subseteq B \leftrightarrow x \in A \rightarrow x \in B$
   akan dibuktikan : $A \cup B = B \leftrightarrow$ (i) $A \cup B \subseteq B$ dan (ii) $B \subseteq A \cup B$

(i) Bukti : $A \cup B \subseteq B$

Misalkan $x \in A \cup B$. Artinya $x \in A$ atau $x \in B$. Akibat $x \in B$ (hipotesis) atau $x \in B$. Jadi, $x \in B$.

$\therefore A \cup B \subseteq B$

(ii) Bukti : $B \subseteq A \cup B$

Misalkan $x \in B$. Akibatnya $x \in A$ atau $x \in B$. Jadi, $x \in A \cup B$.

$B \subseteq A \cup B$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka $A \cup B = B$ ■

2.b Bukti : $A \cap B \subseteq A$

Misalkan $y \in A \cap B$. Akibatnya $y \in A$ dan $y \in B$. Jadi, $y \in A$.

Dengan demikian, $A \cap B \subseteq A$ ■

Latihan

Misalakan A, B, C dan D sebarang himpunan pada semesta pembicaraan S.

1. Jika $A \subseteq B$ dan $C \subseteq D$ maka $A \subseteq D$
2. Jika $A \subseteq B$ maka
   a. $A - B = \phi$
   b. $B - A = B \cap S \cap A^C$
3. Buktikan bahwa $(A \cup B) - [(A - B) \cup (B - A)] = A \cap B$.

BAB V
HIMPUNAN II

5.1. Pasangan Terurut dan Perkalian Himpunan

Pada pembahasan tentang himpunan sebelumnya, urutan anggota dalam suatu himpunan tidak diperhatian, misalnya A = {1, 2} dan B = {2, 1} maka A = B. Berbeda dengan himpunan, pasangan terurut dua buah unsur sangan memperhatikan urutan. Pasangan terurut a dan b, dengan notasi (a, b) berarti pasangan terurut dua anggota suatu himpunan dengan urutan pertama a dan urutan kedua b. Oleh karenanya, jika $a \neq b$, maka $(a, b) \neq (b, a)$.

Pasangan terurut dapat juga melibatkan beberapa unsur. Jika terdiri dari 3 unsur (a_1, a_2, a_3) disebut 3-tupel atau tripel, 4 unsur (a_1, a_2, a_3, a_4) disebut 4-tupel dan seterusnya untuk n unsur $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ disebut n-tupel. Dua pasangan terurut $(a, b) = (c, d)$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$. Secara umum, $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$, jika $a_i = b_I$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Definisi 5.1

Misalkan A dan B dua himpunan sebarang. Perkalaian himpunan A dan B, notasi A × B adalah himpunan semua pasangan terurut yang berbentuk (a, b) dengan $a \in$ A dan $b \in$ B,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh 5.1

Misal diberikan A = { 1, 2, 3, 4} dan B = $\{a, b\}$maka

$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$

$B \times A = \{ (a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2)\ (a, 3), (b, 3)\ (a, 4), (b, 4)\}$

Perhatikan hasil di atas bahwa $A \times B \neq B \times A$.

Contoh 5.2

a. Misalkan $P = \{x \in \mathbb{Z} | \ 0 \leq x \leq 3\}$ dan Q adalah himpunan bilangan prima yang genap. Tentukan P × Q dan Q × Q.
b. Misalkan $S = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y$ solusi dari $y^2 + 1 = 0\}$ dan $T = \{ a, i, u, e, o\}$.

Tentukan $S \times T$ dan $S \times S$.

Jawab :

a. $P = \{ 1, 2, 3\}$ dan $Q = \{2\}$ maka $P \times Q = \{ (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ dan $Q \times Q = \{(2, 2)\}$
b. $S = \phi$ dan $T = \{ a, i, u, e, o\}$ maka $S \times T = \phi$ dan $S \times S = \phi$.

Jika kita perhatian perkalian himpunan di atas, ada beberapa catatan yang dapat kita garis bawahi antara lain :

1. Jika A mempunyai n unsur dan B mempunyai m unsur maka $A \times B$ mempunyai $n \times m$ unsur.
2. Jika A atau B himpunan kosong maka $A \times B$ juga merupakan himpunan kosong.
3. Jika A atau B himpunan infinit maka $A \times B$ juga merupakan himpunan infinit.

Latihan

1. Misalkan $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{ x \mid x$ bilangan prima lebih kecil dari $15\}$ dan C adalah himpunan manusia berkaki kuda. Tentukan :
   a. $A \times B$
   b. $A \times C$
   c. $C \times (A \cup B)$
   d. $(A \cap B) \times B$
2. Jika n(A) menyatakan banyaknya anggota himpunan A dan $P = \{ a, e, o, u\}$ serta $Q =\{1, 2, 3\}$ maka
   a. $n (P \times Q)$
   b. $n (P\times P)$
   c. $n (Q \times Q)$

   Secara umum, jika $n(A) = p$ dan $n(B) = q$ maka $n(A \times B) = \cdots$
3. Misalkan $A = \phi$ dan B himpunan infinit. Apakah yang dapat anda ketahui tentang himpunan $A \times A$ dan $A \times B$? jelaskan jawaban anda!
4. Buktikan jika $A \subseteq B$ dan $C \subseteq D$ maka $(A \times C) \subseteq (B \times D)$

5. Buktikan pernyataan berikut jika benar dan berikan contoh penyangkal jika pernyataannya salah. Misalkan P, Q dan R serta P – Q adalah himpunan-himpunan tak kosong.
   a. $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$ b. $(P\text{-}Q) \times R = (P \times R) - (Q \times R)$

5.2. Relasi

Kadangkala kita dihadapkan dengan masalah dimana kita tidak memerlukan semua anggota dari perkalian antara dua himpunan A dan B, tetapi cukup beberapa saja yang memiliki hubungan tertentu. Hubungan tertentu antara himpunan A dan B kita sebut sebagai relasi antara himpunan A dan B.

Definisi 5.2.

Sebarang subset dari $A \times B$ disebut sebagai relasi antara A dan B. Jika A = B maka sebarang subset dari $A \times B$ disebut relasi pada A.

Jika R relasi pada A maka $(x, y) \in R$ juga dinotasikan dengan xRy yang menyatakan bahwa "*x* pada relasi R berelasi dengan *y*" atau "*x* berelasi denngan *y*", jika R sudah cukup diketahui atau dipahami.

Contoh 5.3.

1. Misalkan A = dan R relasi pada A dengan xRy didefinisikan dengan "*x* membagi y". maka R = { (3, 3), (3, 6), (3, 9), (3, 12), (6, 6), (6, 12)}
2. Misalkan P = { 3, 6, 9, 12} dan Q = { 2, 3, 5, 7, 11} serta R relasi pada $P \times Q$ dengan xR y : = " *x* kurang dari *y*" maka R = {(3, 5), (3, 7), (3, 11), (6, 7), (6, 11), (9, 11)}
3. Misalkan S = { 2, 3, 5}dan R relasi pada S dengan xRy menyatakan x + y = 12. Karena jumlah dua anggota S paling besar 10 maka R = ϕ .

5.2.1. Macam-macam Relasi

Definisi 5.3.

Misalkan R relasi pada A.

1. R dikatakan refleksif, jika untuk setiap $a \in$ A berlaku $(a, a) \in$ R
2. R dikatakan simetri, jika $\forall\, a, b \in$ A, $(a, b) \in$ R maka $(b, a) \in$ R.
3. R dikatakan transitif, jika $\forall\, a, b, c \in$ A, $(a, b) \in$ R dan $(b, c) \in$ R maka $(a, c) \in$ R.

Contoh 5.4.

1. Misalkan A = { 2, 3, 5, 7, 9}. Definisikan relasi pada A sebagai berikut :
   a. R_1 = { (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 9)}
   b. R_2 = { (3, 2), (3, 5), (5, 3), (3, 3), (2, 3)}
   c. R_3 = { (2, 2), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9), (2, 7), (2, 9), (7,2)}
   d. R_4 = { (5, 5), (7, 7), (5, 7), (7, 5), (7, 9), (5, 9), (9, 7), (9, 5)}
   e. R_5 = { (5, 5), (5, 7), (5, 9), (9, 7)}

   Dari kelima relasi di atas manakah yang termasuk relasi refleksif, simetri atau relasi transitif.
2. Misalkan P = $\{a, b, c, d\}$ dan R relasi pada P.
   a. Jika R = $\{(a, a), (b,a), (b, b), (c, b), (c, c), (d, c)\}$maka apakah R termasuk relasi refleksif ? jelaskan jawaban anda!
   b. R = $\{(a, b), (b, c), (c, b), (b, a)\}$ maka apakah R termasuk relasi simetri? jelaskan jawaban anda!
   c. R = $\{(a, a), (b, b), (a, b), (b, c), (c, b), (b, a), (c, c), (d, c)\}$ maka apakah R termasuk relasi transitif? jelaskan jawaban anda!

Jawab :

1. Yang termasuk relasi refleksif adalah R_3; relasi simetri adalah R_2 dan R $_4$ dan relasi transitif adalah R_4
2. a. R bukan relasi refleksif, sebab $d \in$ P tetapi $(d, d) \notin$ R.
   b. R relasi simetri, sebab $(a, b) \in$ R berimplikasi $(b, a) \in$ R dan $(c, b) \in$ R berimplikasi $(b, c) \in$ R atau sebaliknya.
   c. R bukan relasi transitif, sebab (a, b) dan $(b, c) \in$ R tetapi $(a, c) \notin$ R.

Definisi 5.4.

Relasi R pada A disebut relasi ekivalen , jika R merupakan relasi refleksif, simetri dan transitif.

Contoh 5.5.

Misalkan P adalah himpunan segitiga pada bidang datar dan R adalah relasi pada P dengan $a\text{R}b$ menyatakan bahwa a kongruen (sama dan sebangun) dengan b. Apakah relasi R pada P tersebut termasuk relasi ekivalen?

Jawab :

R memenuhi sifat refleksif, sebab setiap segitiga pasti konruen dirinya sendiri.

R memenuhi sifat simetri, sebab jika Δ ABC kongruen dengan Δ PQR maka Δ PQR pasti kongruen dengan Δ ABC.

R memenuhi sifat transitif, sebab jika Δ ABC kongruen dengan Δ PQR dan Δ PQR kongruen dengan Δ XYZ maka Δ ABC kongruen dengan Δ XYZ.

Dengan demikian, R merupakan relasi ekivalen pada P.

Contoh 5.6.

Misalkan Q adalah himpunan manusia dan R menyatakan relasi pada Q dengan $(x, y) \in$ R berarti "x adik dari y". Apakah relasi R pada Q tersebut termasuk relasi ekivalen?

Jawab :

R tidak memenuhi sifat refleksif, sebab tidak mungkin seseorang itu <u>adik dari dirinya sendiri</u>, atau R tidak memenuhi sifat simetri, sebab jika A adik dari B maka B adalah kakak dari A bukan adik dari A.

Karena R pada Q tidak memenuhi setidaknya satu dari sifat refleksif atau simetri maka R bukan merupan relasi ekivalen.

Catatan : Untuk membuktikan suatu relasi bukan relasi ekivalen, cukup menunjukkan bahwa relasi tersebut tidak memenuhi salah satu sifat refleksif, simetri atau transitif tidak perlu semuanya (ingat ingkaran dari kuantifikasi universal!)

Latihan

1. Misalkan R relasi pada A = {3, 4, 5, 6, 7, 8}. Tentukan masing-masing anggota dari R, jika $(x, y) \in R$ didefinisikan sebagi berikut :
   a. "Faktor persekutuan terbesar antara x dan y sama dengan 1"
   b. "$x \leq y$"
   c. " x merupakan faktor dari y"
   d. "$x + y \geq 6$"
   e. "$x - y \geq 4$"
2. Misalkan A = { 1, 2, 3, 4, 5} dan relasi R_j pada A, $\forall$ j = 1,2, $\cdots$, 6.
   R_1 = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
   R_2 = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
   R_3 = {(2,2), (2,3), (4,4), (3,5), (3,2), (5,3), (5,5)}
   R4 = {(1,1), (2,3), (3,4), (3,2), (3,3), (2,4), (5,3), (5,4)}
   R_5 = {(1,1), (2,2), (5,5), (2,3), (3,4), (4,4), (2,4), (3,2), (4,2), (4,3), (3,3)}
   R_6 = {(2,3), (3,2), (4,4), (5,5)}
   Manakah diantara relasi-relasi di atas yang termasuk relasi refleksif, simetri, transitif atau ekivalen?
3. Jika M adalah himpunan manusia dan R relasi pada M. Relasi R didefinisikan dengan $(x, y) \in R$ berarti
   a. "x segolongan darah dengan y"
   b. "x anak dari y"
   c. "x sepupu dengan y"
   d. "x saudara sekandung dengan y"
   e. "x bertemanan dengan y"
   Untuk masing-masing definisi relasi di atas, tentukan jenis dari relasi tersebut!
4. Apakah ada suatu himpunan A sedemikian hingga semua relasi pada A adalah relasi refleksif? Jika ada berikan contoh dan jika tidak ada berikan alasan anda!
5. Apakah ada suatu himpunan B sedemikian hingga semua relasi pada B adalah relasi simetri? Jika ada berikan contoh dan jika tidak ada berikan alasan anda!

5.2.2 Urutan pada Relasi

Definisi 5.5.

Jika R relasi pada A dan R memenuhi sifat :

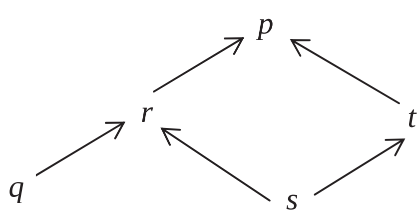
1. refleksif, yaitu $\forall\, a \in$ A, $(a, a) \in$ R
2. antisimetri, yaitu $\forall\, a, b \in$ A, $(a, b) \in$ R dan $(b, a) \in$ R berakibat $a = b$.
3. transitif, yaitu $\forall\, a, b, c \in$ A, $(a, b) \in$ R dan $(b, c) \in$ R berakibat $(a, c) \in$ R.

Maka relasi R pada A tersebut mendefinisikan suatu urutan parsial (*partial order*), dengan $(a, b) \in$ R dinyatakan dengan ”$a \preccurlyeq b$” (baca : a mendahului b).

Catatan : tanda “ $\preccurlyeq$ “ pada urutan parsial tidak selalu menyatakan “kurang dari” dan untuk menyederhanakan penulisan “$a \preccurlyeq b$” sama dengan “$a \leq b$”

Contoh 5.7.

1. Misalkan □ keluarga himpunan (himpunan yang anggota-anggotanya adalah himpunan) dan relasi R pada □ didefinisikan dengan aRb menyatakan “a subset dari b”. Apakah relasi R pada □ merupakan urutan parsial?
2. Misalkan S $\subseteq$ □ dan relasi “$\leq$ “ menyatakan urutan kurang dari. Apakah relasi “$\leq$” pada S merupakan urutan partial?
3. Misalkan A = $\{p, q, r, s, t\}$ dan diagram berikut menyatakan hubungan antara anggota-anggota A



relasi “ $x \leq y$” pada A menyatakan bahwa x = y atau x mendahului y. Apakah diagram di samping mendefinisikan suatu urutan parsial pada A?

Jawab :

1. Berdasarkan definisi “subset”, relasi “a subset dari b” jelas memenuhi sifat refleksif, anti simetri dan transitif (coba anda tunjukkan sendiri!). Oleh Karenanya, relasi R pada □ merupakan urutan parsial.

2. Relasi "≤ " pada S ⊆ ▯ memenuhi sifat refleksif, anti simetri dan transitif sehingga relasi "≤ " merupakan urutan parsial pada S.
3. Relasi " $x \leq y$" pada A yang menyatakan bahwa x = y atau x mendahului y termasuk urutan parsial, sebab :
   a. sifat refleksif dipenuhi karena $p \leq p$, $q \leq q$, $r \leq$ r, $s \leq$ s dan $t \leq t$.
   b. sifat antisimetri, dipenuhi karena ∀ x, $y \in$ A, "$x \leq y$" tetapi " $y \nleq x$". Karena hipotesis salah maka menyimpulkan "$x = y$" sahih secara logika.
   c. sifat transitif dipenuhi karena

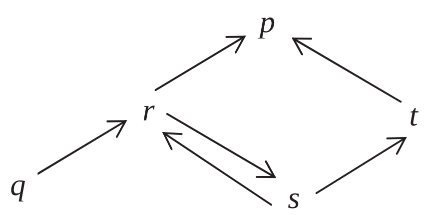
      $q \leq r$ dan $r \leq p$ berimplikasi $q \leq p$

      $s \leq r$ dan $r \leq p$ berimplikasi $s \leq p$

      $s \leq t$ dan $t \leq p$ berimplikasi $s \leq p$

Contoh 5.8.

Misalkan B = {p, q, r, s, t} dan diagram berikut menyatakan hubungan antara anggota-anggota B



relasi " $x \leq y$" pada B menyatakan bahwa x = y atau x mendahului y. Apakah diagram di samping mendefinisikan suatu urutan parsial pada B?

Jawab :

Relasi " $x \leq y$" pada B yang didefinisikan dengan x = y atau x mendahului y sebagaimana diperlihatkan oleh diagram di atas <u>bukan</u> merupakan urutan parsial, karena tidak memenuhi sifat antisimetri, yaitu $r \leq s$ dan $s \leq r$ tetapi $r \nleq s$.

Definisi 5.6.

Suatu himpunan A disertai dengan relasi urutan parsial "≤ " tertentu pada A disebut himpunan terurut parsial (*partilly ordered set*, POSET), dinotasikan dengan pasangan terurut (A, ≤).

Dua anggota a dan b pada suatu POSET (A, $\leq$) dikatakan komparabel atau dapat dibanding, jika $a \leq b$ atau $b \leq a$. Sebaliknya, dikatakan tidak komparabel, jika $a \nleq b$ dan $b \nleq a$. Sebagai contoh, perhatikan diagram pada contoh 2.13, terlihat bahwa q dan s tidak komparabel tetapi q dengan yang lainnya yaitu r, t dan p adalah komparabel.

Misalkan (A, $\leq$) suatu POSET. Beberapa anggota A tidaklah perlu untuk dapat dibandingkan. Tetapi, jika setiap dua anggota pada (A, $\leq$) dapat dibandingkan maka urutan parsial pada A disebut urutan total pada A.

Definisi 5.7.

Urutan total pada himpunan A adalah urutan parsial pada A dengan tambahan sifat setiap a, $b \in$ A berlaku

$$a < b, \text{ atau } a = b \text{ atau } a > b$$

Himpunan A disertai dengan urutan total ($\leq$) tertentu pada A disebut himpunan terurut total (*totally ordered set*, TOSET).

Contoh 5.9.

1. Misalkan P $\subseteq \mathbb{N}$ sebarang dengan urutan parsial "$\leq$ " (urutan yang umum dipakai). Apakah urutan parsial "$\leq$ " pada P termasuk urutan total?
2. Misalakn R adalah urutan parsial pada Q = {2, 3, 4, 5, 6, 7} yang didefinisikan xRy berarti "x faktor dari y", $\forall\, x, y \in$ Q. Apakah R urutan total pada Q?

Jawab :

1. Karena setiap dua bilangan riil selalu dapat dibanding (sifat trikotomi bilangan riil), maka urutan parsial "$\leq$ " pada P merupakan urutan total pada P.
2. R bukan urutan total pada Q, sebab 2 bukan faktor dari 3 dan sebaliknya.

5.2.3. Unsur Awal dan Unsur Akhir

Definisi 5.8.

Misalkan A adalah himpunan terurut. Unsur $a \in$ A disebut **unsur awal** pada A, jika a mendahului setiap anggota dari A,

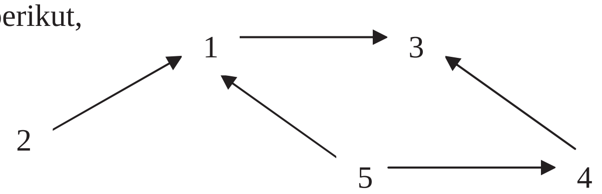
$$a \leq x, \forall\, x \in \text{A}$$

unsur $b \in$ A disebut **unsur akhir** pada A, jika b mengatasi setiap anggota dari A,

$$y \leq b, \forall\, y \in \mathrm{A}$$

Contoh 5.10.

Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5} adalah himpunan terurut dengan urutan seperti pada diagram berikut,



Tentukan unsur awal dan unsur akhir pada himpunan A jika ada!

Jawab :

Unsur awal pada A tidak ada, sebab tidak ada anggota A yang mendahului setiap anggota A yang lainnya. Sedangkan unsur akhir pada A adalah 3, sebab 3 mengatasi anggota A yang lainnya.

Contoh 5.11.

Tentukan unsur awal dan unsur akhir pada

a. $\mathbb{N}$ dengan menggunakan urutan alamiah.

b. $\mathbb{Z}$ dengan menggunakan urutan alamiah.

Jawab :

a. Unsur awal pada $\mathbb{N}$ adalah 1, sebab $1 \leq n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sedangkan unsur akhirnya tidak ada.

b. Unsur awal dan anggota akhir pada $\mathbb{Z}$ tidak ada. (kenapa?)

Catatan: Setiap himpunan terurut parsial A, paling banyak memuat satu unsur awal dan satu unsur akhir.

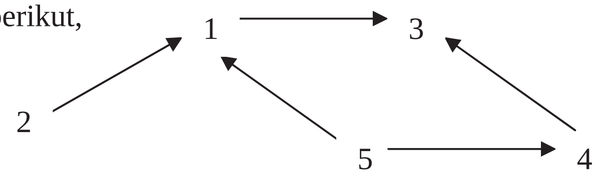
5.2.4. Unsur Maksimum dan Unsur Minimum

Definisi 5.9.

Misalkan A adalah himpunan terurut. Suatu unsur $a \in$ A disebut **unsur maksimum** pada A, jika tidak ada anggota A yang murni mengatasi a. Sedangkan $b \in$ A disebut **unsur minimum** pada A, jika tidak ada anggota A yang murni mendahului b.

Contoh 5.12.

Misalkan P = {1, 2, 3, 4, 5} adalah himpunan terurut dengan urutan seperti pada diagram berikut,



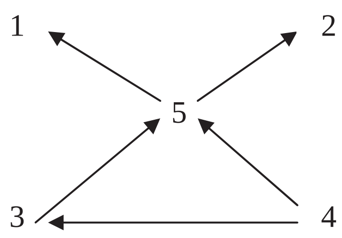
Tentukan unsur maksimum dan unsur minimum pada himpunan P jika ada!

Jawab :

Unsur maksimumnya adalah 3 sedangkan unsur minimumnya 2 dan 5.

Contoh 5.13.

Misalkan P = {1, 2, 3, 4, 5}. Dengan urutan seperti pada diagram disamping, unsur maksimum pada P adalah 1 dan 2, sedangkan unsur minimumnya adalah 4.



Catatan:

1. Misalkan A himpunan terurut parsial.
   a. Jika *a* adalah unsur awal pada A maka *a* adalah unsur minimum dan merupakan satu-satunya unsur minimum pada A.
   b. Jika *b* adalah unsur akhir pada A maka *b* adalah unsur maksimum dan merupakan satu-satunya unsur maksimum pada A.
   c. Jika A himpunan finit, maka A paling sedikit memuat satu unsur minimum dan paling sedikit memuat satu unsur maksimum.
2. Jika B himpunan terurut total maka
   a. B paling banyak hanya satu memuat unsur minimum yang sekaligus merupakan unsur awal, dan
   b. B paling banyak hanya satu memuat unsur maksimum yang sekaligus merupakan unsur akhir.

3. Jika A himpunan terurut (parsial atau total) dan A infinit maka A belum tentu memiliki unsur maksimum atau unsur minimum.

5.2.5. Batas Atas dan Batas Bawah

Definisi 5.10.

Misalkan A himpunan terurut parsial dan B $\subseteq$ A. $b \in$ A disebut batas bawah pada B, jika untuk setiap $x \in$ B maka $b \leq x$, atau b mendahului setiap anggota B. Jika β adalah batas bawah pada B dan $\beta \geq b$, untuk setiap b batas bawah pada B maka β disebut <u>batas bawah terbesar</u> pada B dan dinotasikan dengan inf(B).

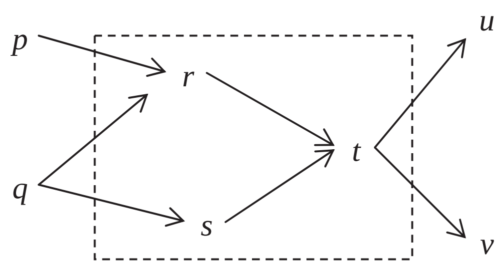
Sedangkan,

$a \in$ A disebut batas atas pada B, jika untuk setiap $y \in$ B maka $y \leq a$, atau a mengatasi setiap anggota B. Jika α adalah batas atas pada B dan $\alpha \leq a$, untuk setiap a batas atas pada B maka α disebut <u>batas atas terkecil</u> pada B dan dinotasikan dengan sup(B).

Berdasarkan definisi di atas, batas bawah terbesar dan batas atas terkecil dari suatu himpunan terurut paling banyak satu.

Contoh 5.14.

Misalkan P ={p, q, r, s, t, u, v} himpunan terurut dengan urutan sebagai berikut



Jika Q = {r, s, t} $\subseteq$ P maka tentukan :

a. batas bawah dan batas atas pada Q

b. batas bawah terbesar dan batas atas terkecil pada Q

Jawab :

a. batas bawah Q adalah { q }dan batas atas Q adalah {t, u, v}

b. batas bawah terbesar Q adalah q sedangkan batas atas terkecil Q adalah t.

Contoh 5.15.

Misalkan A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 2\}$ dengan urutan alamiah "≤ ". Jika ada, tentukan batas bawah, batas atas, batas bawah terbesar dan batas atas terkecil pada A.

Jawab :

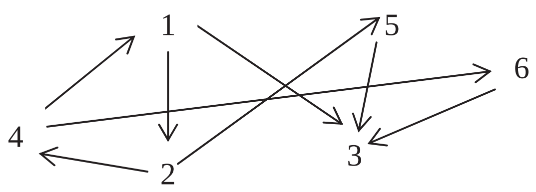
Batas bawah A adalah $\{ y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 0\}$;

Batas atas A adalah $\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 2\}$;

Batas bawah terbesar A adalah 0 dan batas atas terkecil A adalah 2.

Latihan

1. Misalkan R pada dengan aRb didefinisikan sebagai " a faktor dari b". Apakah (□,R) merupakan himpunan terurut parsial? Jelaskan!
2. Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan urutannya diberikan oleh diagram berikut :



   tanda panah pada diagram di atas menunjukkan urutan pada A, dimana $a \rightarrow b$ berarti "a mendahului b" atau "dari a menuju b". Apakah (A, $\rightarrow$) merupakan himpunan terurut parsial? jelaskan jawabanmu!
3. Misalkan P = { $x \in$ □ | $1 \leq x < 9$} merupakan himpunan terurut dengan urutan aRb berarti "a faktor dari b".
   a. Konstruksilah diagram yang menggambarkan urutan parsial pada P.
   b. Tentukan unsur awal dan unsur akhir pada P, jika ada!
   c. Tentukan unsur minimum dan maksimum pada P.
   d. Tentukan batas bawah dan batas atas pada P, jika ada!
   e. Tentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil pada P!

BAB VI
HIMPUNAN III

6.1 Fungsi

6.1.1. Definisi Dasar

Definisi 6.1.

Fungsi adalah suatu tripel (f, A, B) yang memenuhi

1. A dan B adalah himpunan dan $f \subseteq A \times B$
2. Untuk setiap $x \in A$ terdapat $y \in B$ sehingga $(x, y) \in f$
3. Jika $(x, y) \in f$ dan $(x, z) \in f$ maka $y = z$

A disebut domain dari f (dinotasikan dengan D_f) dan B disebut kodomain dari f.

Fungsi (f, A, B) sering juga ditulis sebagai $f : A \rightarrow B$. Selanjutnya, jika $(x, y) \in f$ maka biasanya dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ dan y peta dari x oleh f.
Himpunan $\{y \in B \mid \text{terdapat } x \in A \text{ sehingga } y = f(x)\}$ disebut range dari f, dinotasikan dengan R_f. Dengan demikian dapat dipahami bahwa R_f merupakan subset dari kodomain f, yaitu $R_f \subseteq B$.

Sejalan dengan definisi di atas, fungsi $f : A \rightarrow B$ dapat juga didefinisikan sebagai suatu aturan yang mengaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota di B,
atau

$$\forall\, x \in A,\ \exists!\, y \in B \ni y = f(x) \text{ atau } (x, y) \in f$$

Contoh 6.1.

Misalkan A = { 1, 2, 3, 4, 5}, $f \subseteq A \times \mathbb{N}$ dan f memasangkan setiap anggota A dengan dua kali dirinya atau f didefinisikan sebagai $f(x) = 2x$, $\forall\, x \in A$.

a. Apakah f fungsi?
b. Tentukan $f(2)$, $f(3) + 4$ dan $f(1) + f(4)$

Jawab :

a. Hubungan antara x dan $f(x)$ di atas dapat dituliskan dalam tabel berikut :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	6	8	10

Berdasarkan tabel di atas, terlihat bahwa setiap unsur A sudah dipasangkan dengan tepat satu anggota $\mathbb{N}$. Jadi, $f \subseteq A \times \mathbb{N}$ merupakan suatu fungsi.

b. Nilai dari :

$f(2) = 4$,

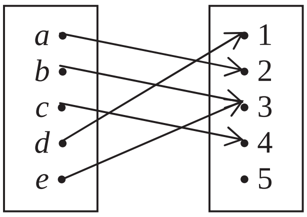
$f(3) + 4 = 2 \times 3 + 4 = 10$ dan

$f(1) + f(4) = 2 \times 1 + 2 \times 4 = 2 + 8 = 10$.

Contoh 6.2.

Misalkan f fungsi dengan

1. $f = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,1), (e,3)\}$
2. Fungsi f diberikan oleh diagram berikut :



Tentukan D_f , Kodomain dan R_f !

Jawab :

1. $D_f = \{a, b, c, d, e\}$; Kodomain dari $f = \{1, 2, 3\}$ dan $R_f = \{1, 2, 3\}$
2. $D_f = \{a, b, c, d, e\}$; Kodomain dari $f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $R_f = \{1, 2, 3, 4\}$

Kadangkala suatu fungsi diberikan dalam bentuk grafik. Tetapi, tidak semua grafik merupakan representasi dari suatu fungsi. Hukum berikut dapat digunakan untuk menguji apakah suatu grafik merupakan representasi dari suatu fungsi atau bukan, yang dikenal dengan teorema garis vertikal.

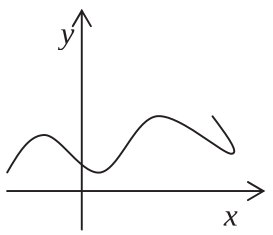
Teorema Garis Vertikal

Jika garis vertikal memotong grafik tepat di satu titik maka grafik tersebut merupakan fungsi. Sebaliknya, jika garis vertikal tersebut memotong lebih dari satu maka grafik tersebut bukan suatu fungsi.

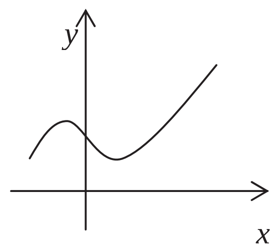
Teorema ini mudah kita pahami, jika definisi fungsi di atas dipahami dengan benar. Terkait dengan hal ini, domain dari fungsi merupakan bagian dari sumbu mendatar (sumbu-x) dan kodomainnya pada sumbu vertikal (sumbu-y). Setiap garis vertikal memotong grafik tepat disatu titik berarti setiap anggota domain berpasangan dengan tepat satu anggota di kodomain. Sebaliknya, jika terdapat garis vertikal yang memotong grafik lebih dari satu titik, berarti ada anggota domain yang berpasangan dengan lebih dari satu titik di kodomain. Hal ini melanggar definisi fungsi, bahwa setiap anggota di domain hanya berpasangan dengan tepat satu anggota di kodomain.

Contoh 6.3.

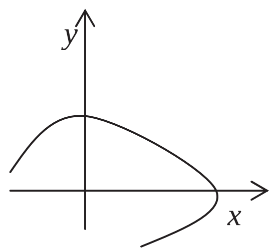
Grafik manakah di antara grafik-grafik berikut yang merupakan grafik suatu fungsi?



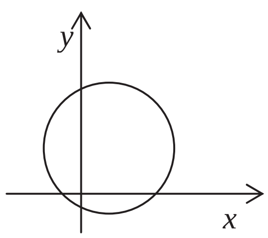
(a)



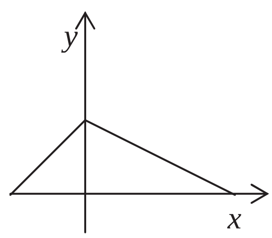
(b)



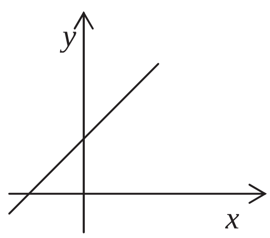
(c)



(d)



(e)



(f)

Jawab :

Berdasarkan teorema garis vertikal di atas, grafik yang merupakan representasi fungsi adalah grafik (b), grafik (e) dan grafik (f). Sebaliknya, grafik (a), grafik (c) dan grafik (d) bukan merupakan fungsi (kenapa?)

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : C \rightarrow D$ adalah suatu fungsi. Fungsi f dan g dikatakan sama jika memenuhi

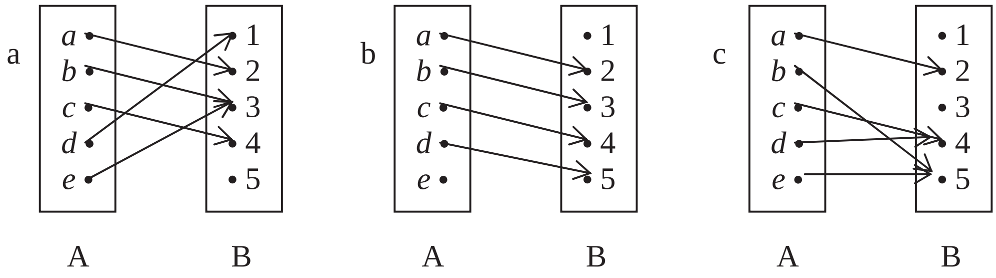
1. A = C
2. B = D
3. $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in A = C$.

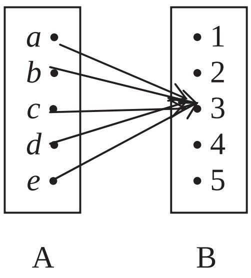
Dengan kata lain, dua buah fungsi f dan g dikatakan sama ($f = g$), jika

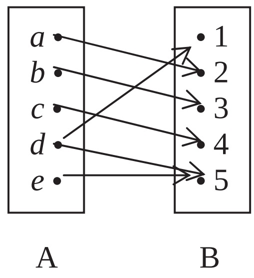
1. $D_f = D_g$ dan
2. $f(a) = g(a)$, $\forall\, a \in D$.

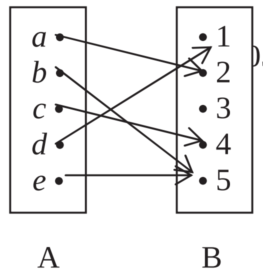
Latihan

1. Nyatakan apakah setiap relasi berikut mendefinisikan suatu fungsi f dari A ke B, jika A = {1, 2, 3, 4} dan B = {a, b, c}? jelaskan!
   a. $f = \{(1,a), (2,a), (3,a), (4,a)\}$
   b. $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$
   c. $f = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,c)\}$
   d. $f = \{(1,a), (1,b), (1,c), (4,c)\}$
   e. $f = \{(1,b), (2,c), (3,a), (4,c)\}$
   f. $f = \{(1,b), (2,b), (3,c), (4,c)\}$
2. Manakah diantara diagram berikut yang merupakan fungsi dari A ke B? Jelaskan!

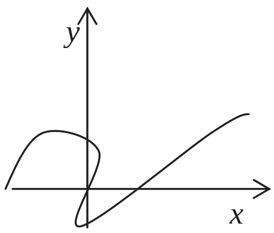


d


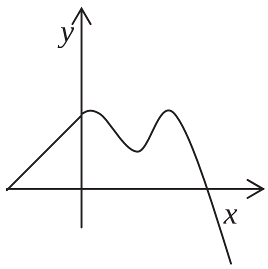
e


f


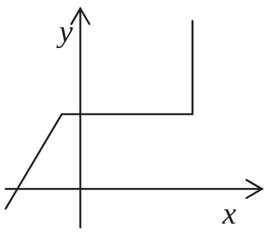
3. Yang manakah diantara grafik berikut yang merupakan representasi suatu fungsi?



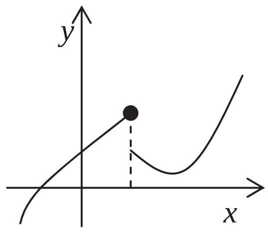
(a)



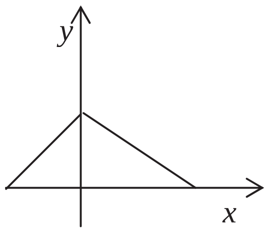
(b)



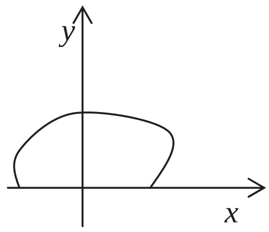
(c)



(d)



(e)



(f)

4. Diantara relasi-relasi berikut ini, manakah yang merupakan suatu fungsi?
   a. f memasangkan setiap ibu kandung dengan anak-anaknya
   b. g memasangkan setiap negara dengan bendera negaranya
   c. h memasangkan setiap orang dengan nomor KTP-nya
   d. p memasangkan setiap bilangan riil dengan kuadratnya
   e. q memasangkan setiap bilangan asli dengan bilangan asli yang nilainya satu lebih besar dari bilangan asli semula
5. Tentukan formula untuk masing-masing fungsi berikut.
   a. f memasangkan bilangan riil dengan pangkat dua dari bilangan itu dikurangi 1.
   b. g memasangkan setiap bilangan riil dengan dirinya sendiri
   c. h memasangkan setiap bilangan bulat dengan ½ kali bilangan itu ditambah 13

d. *p* memasangkan setiap bilangan riil positif atau nol dengan akar kuadrat bilangan tersebut.

e. q memasangkan setiap bilangan asli dengan bilangan prima yang genap.

6. Diketahui $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x + 5$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. Tentukan :

   a. $f(a)$, $f(2)$, $f(-5)$ dan $f(0)$

   b. $f(a + b)$, $f(a - b)$ dan $f(5a)$

   c. jika ada, berapakah nilai $a \in D_f$ agar $f(a) = 0$

7. Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{untuk } x < -1 \\ 1 - x^2, & \text{untuk } -1 \le x < 2 \\ x - 1, & \text{untuk } x \ge 2 \end{cases}$$

   Tentukan $f(-5)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$ dan $f(0)$

8. Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 3}$ adalah suatu fungsi, tentukanlah :

   a. Domain *f* yang mungkin

   b. Kodomain dari *f* yang terbesar

   c. Range dari *f*

   d. $f(-2)$ dan $f(5)$

   e. $a \in D_f$ sehingga $f(a) = 0$.

6.1.2. Macam-macam Fungsi

6.1.2.1. Fungsi Onto atau Surjektif

Definisi 6.2.

Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi. *f* disebut fungsi onto atau surjektif, jika range dari *f* sama dengan kodomain dari *f*, yaitu $R_f = B$.

Fungsi onto atau surjeksi disebut juga dengan fungsi pada. Secara operasional, definisi di atas dapat diterjemahkan dengan “setiap kali kita mengambil *y* anggota di kodomain maka selalu bisa diperoleh atau dicari *x* anggota di domain sehingga $y = f(x)$”. Dengan simbol logika dapat dinyatakan dengan

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \ni y = f(x)$$

Fungsi $f : A \to B$ yang bukan fungsi onto dikatakan fungsi into, yaitu $R_f \subset B$ (R_f merupakan subset sejati dari B).

Contoh 6.4.

1. Contoh 2.17 a) merupakan fungsi onto, tetapi contoh 2.17 b) merupakan fungsi into (kenapa?)
2. Misalkan A = {1, 3, 5, 7} dan B = {2, 4, 6, 8}. Definisikan fungsi $f : A \to B$ dengan $f(x) = x + 1, \forall\, x \in A$. Fungsi f merupakan fungsi onto, karena $R_f = \{2, 4, 6, 8\} = B$
3. Misalkan P = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan fungsi $g : P \to \mathbb{N}$ didefinisikan dengan $g(a) = 3\,a$, $\forall\, a \in P$. Fungsi g merupakan fungsi into (bukan onto), karena
 $R_g = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \subset \mathbb{N}$.

Latihan

1. Jika $f : A \to B$ adalah fungsi onto, tentukan $f(A)$!
2. Jika $f : A \to A$ adalah suatu fungsi, apakah f fugsi onto?
3. Diantara rumusan fungsi berikut dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$, dengan menggunakan sketsa grafik fungsi tersebut manakah yang termasuk fungsi onto?
   a. $f(x) = x^2 - 4$
   b. $f(x) = x^3 + 2$
   c. $f(x) = x + a$, untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$.
   d. $f(x) = 3\,x$
4. Misalkan A = {1, 2, 3, 4} dan B = $\{a, b\}$.
   a. Tentukan macam-macam fungsi onto yang dapat dibuat dari A ke B
   b. Dapatkah dikonstruksi sebuah fungsi onto dari B ke A? jelaskan jawabanmu!
5. Misalkan A = $\{p, q, r, s\}$ dan B = {2, 3, 4} serta relasi $f \subseteq A \times B$ berikut.
   a. $f = \{(p,2), (q, 3), (r,4), (s, 2)\}$
   b. $f = \{(p,2), (q, 2), (r,2), (s, 2)\}$
   c. $f = \{(p,2), (q, 3), (r,4)\}$

d. $f = \{(p,2), (q, 3), (r,3), (s, 2)\}$

e. $f = \{(q,2), (q, 3), (r,4), (s, 2)\}$

Manakah diantara relasi di atas yang merupakan fungsi onto?

6. Misalkan fungsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan

   a. $f(x) = x^2 + 2$

   b. $f(x) = x^3 - 1$

   Selidiki manakah diantara fungsi-fungsi di atas yang merupakan fungsi onto? buktikan jawaban anda!

6.1.2.2. Fungsi Satu-satu atau Injektif

Definisi 6.3.

Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi. f disebut fungsi satu-satu (1-1) atau injektif, jika $f(a) = f(b)$ berimplikasi $a = b$ untuk setiap $a, b \in A$.

Atau, $a \neq b$ berimplikasi $f(a) \neq f(b)$ untuk setiap $a, b \in A$.

Contoh 6.6.

Selidiki apakah fungsi-fungsi berikut termasuk fungsi 1-1 atau bukan!

1. Misalkan A = {1, 3, 5, 7} dan B = {2, 4, 6, 8}. Definisikan fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan $f(x) = x + 1$, $\forall x \in A$.
2. $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dengan $g(a) = 2a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.
3. $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $h(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Jawab :

1. Fungsi f adalah fungsi 1-1 (cek !)
2. Misalkan $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ sebarang dan $g(a_1) = g(a_2)$.

   Akibatnya diperoleh

$$g(a_1) = g(a_2) \leftrightarrow 2\,a_1 = 2\,a_2 \leftrightarrow a_1 = a_2$$

   $\therefore$ fungsi g adalah fungsi 1-1.

3. Fungsi h bukan fungsi 1-1, sebab $-1, 1 \in \mathbb{Z}$ tetapi $h(-1) = 1 = h(1)$.

Latihan

1. Misalkan f : A $\rightarrow$ A adalah suatu fungsi dengan $f(x) = x$, $\forall\, x \in$ A, apakah f fugsi 1-1? Dengan menggunakan ilustrasi, jelaskan jawaban anda!
2. Diantara rumusan fungsi berikut dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$, dengan menggunakan sketsa grafik fungsi tersebut manakah yang termasuk fungsi 1-1?
   a. $f(x) = \sqrt{x}$
   b. $f(x) = x^3 + 2$
   c. $f(x) = x + a$, untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$
3. Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {a, b, c, d}.
   a. Tentukan macam-macam fungsi 1-1 yang dapat dibuat dari A ke B
   b. Dapatkah dikonstruksi sebuah fungsi 1-1 dari B ke A? jelaskan jawabanmu!
4. Misalkan A = {p, q, r, s} dan B = {2, 3, 4, 5, 6} serta relasi $f \subseteq$ A $\times$ B berikut.
   a. $f = \{(p,2), (q, 3), (r,4), (s, 5)\}$
   b. $f = \{(p,3), (q, 4), (r,5), (s, 2)\}$
   c. $f = \{(p,2), (q, 3), (r,4)\}$
   d. $f = \{(p,6), (q, 4), (r,3), (s, 2)\}$
   e. $f = \{(q,2), (q, 3), (r,4), (s, 2)\}$

   Manakah diantara relasi di atas yang merupakan fungsi 1-1? jelaskan jawaban anda!
5. Selidiki apakah fungsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan
   a. $f(x) = x^2 + 2$
   b. $f(x) = x^3 - 2$

   Diantara fungsi-fungsi di atas, manakah yang termasuk fungsi 1-1? Jelaskan jawabanmu!
6. Jika f : A $\rightarrow$ A dengan n(A) = 3 maka berapa macamkah fungsi 1-1 yang dapat dibuat? Secara umum, jika n(A) = k maka berapa macamkah fungsi 1-1 yang dapat dibuat?

6.1.2.3 Fungsi Bijektif

Definisi 6.4.

Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi. f disebut fungsi bijektif, jika f merupakan fungsi onto dan 1-1.

Contoh 6.5.

Selidiki apakah fungsi-fungsi berikut termasuk fungsi bijektif atau bukan!

1. Misalkan A = {1, 3, 5, 7} dan B = {2, 4, 6, 8}. Definisikan fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan $f(x) = x + 1, \forall x \in A$.
2. $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dengan $g(a) = 2a, \forall a \in \mathbb{N}$.
3. $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $h(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Jawab :

1. Fungsi f merupakan fungsi bijeksi, sebab f fungsi onto (contoh 2.19) dan f fungsi 1-1 (contoh 2.20).
2. Fungsi g merupakan fungsi bijeksi, sebab
   a. fungsi g fungsi 1-1 (contoh 2.20)
   b. Akan ditunjukkan g fungsi onto.
      Misalkan $b \in \mathbb{N}$ sebarang. Terdapat $a = ½\, b$ (bagaimana mencarinya) sehingga $g\,(a) = 2\,(½\, b) = b$.
      $\therefore$ fungsi g adalah fungsi onto.

3. Fungsi h adalah bijeksi, sebab :
   a. Akan ditunjukkan h fungsi 1-1
      Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$ sebarang dan $h(x) = h(y)$.
      Akibatnya diperoleh
      $$h(x) = h(y) \leftrightarrow x^3 = y^3 \leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y^3} \leftrightarrow x = y$$
      $\therefore$ fungsi h adalah fungsi 1-1.
   b. Akan ditunjukkan h fungsi onto.

Misalkan $y \in \mathbb{Z}$ sebarang. Terdapat $x = \sqrt[3]{y}$ (bagaimana mencarinya) sehingga $h(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

$\therefore$ fungsi h adalah fungsi onto.

6.1.3. Komposisi Fungsi

Definisi 6.5.

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : C \rightarrow D$ adalah suatu fungsi sehingga $R_f \subseteq D_g$. Komposisi fungsi f dan g, dengan notasi $g \circ f$, didefinisikan dengan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in D_f.$$

Contoh 6.6.

Misalkan $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dengan $f(x) = 2x$ dan $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dengan $g(x) = x^3$.

Apakah komposisi fungsi $g \circ f$ dan $f \circ g$ dapat didefinisikan?, jika ya!, tentukan formula $g \circ f$ dan $f \circ g$.

Jawab:

a. Kasus $g \circ f$

Karena $R_f \subseteq \mathbb{N} = D_g$ maka komposisi fungsi $g \circ f$ dapat didefinisikan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^3 = 8x^3$.

b. Kasus $f \circ g$

Karena $R_g \subseteq \mathbb{N} = D_f$ maka komposisi fungsi $f \circ g$ dapat didefinisikan dengan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 = 2x^3$.

Contoh 6.7.

Soal yang sama dengan contoh 6.6., misalkan f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x$ dan $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $g(x) = \sqrt{x}$.

jawab:

c. Kasus $g \circ f$

Karena $R_f = \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N} \cup \{0\} = D_g$ maka komposisi fungsi $g \circ f$ tidak dapat didefinisikan.

d. Kasus $f \circ g$

Karena $R_g = \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z} = D_f$ maka komposisi fungsi $f \circ g$ dapat didefinisikan dengan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 = 2x^3$.

Dari contoh 2.22 dapat dilihat bahwa secara umum pada komposisi fungsi tidak berlaku sifat komutatif,

$$g \circ f \neq f \circ g$$

tetapi, sifat assosiatif berlaku,

$$(g \circ f) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Coba anda tunjukkan sebagai latihan !

Latihan

1. Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $\forall x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 2 - x^3$ dan $g(x) = 3x$. Tentukan:
   a. formula untuk $g \circ f$ dan $f \circ g$
   b. nilai untuk $(g \circ f)(3)$ dan $(f \circ g)(3)$
2. Jika $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\forall x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 2 - x^3$ dan $(g \circ f)(x) = 3x + 1$ maka rumus fungsi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang memenuhi adalah $\cdots$
3. Buktikan
   a. Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ adalah fungsi onto maka $(g \circ f) : A \to C$ adalah fungsi onto.
   b. Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ adalah fungsi 1-1 maka $(g \circ f) : A \to C$ adalah fungsi 1-1.
   c. Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ adalah fungsi bijeksi maka $(g \circ f) : A \to C$ adalah fungsi bijeksi.

4. Buktikan bahwa sifat assosiatif komposisi fungsi berlaku, yaitu $(g \circ f) \circ h = f \circ (g \circ h)$

6.1.4. Fungsi Invers

Definisi 6.6.

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $b \in B$. Invers dari b oleh fungsi f, dinotasikan dengan $f^{-1}(b)$ adalah anggota-anggota A yang dipasangkan dengan $b \in B$, atau

$$f^{-1}(b) = \{ a \in A \mid b = f(a)\}$$

Jika $b = f(a)$ maka kita sebut b sebagai peta dari a oleh f, sebaliknya jika $a = f^{-1}(b)$, maka a disebut pra peta dari b oleh f.

Sebagai ilustrasi perhatikan kembali contoh 2.21, yaitu misalkan A = {1, 3, 5, 7} dan B = {2, 4, 6, 8} dan fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan $f(x) = x + 1$, $\forall\, x \in A$. Maka

$$f(1) = 2,\ f(3) = 4,\ f(5) = 6,\ f(7) = 8 \text{ dan}$$
$$f^{-1}(2) = 1, f^{-1}(4) = 3, f^{-1}(6) = 5, f^{-1}(8) = 7$$

Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi 1-1 dan onto. Akibatnya setiap $b \in B$, hanya terdapat satu $a \in A$ sehingga $f^{-1}(b) = a$. Karena setiap anggota B mempunyai pasangan tepat satu di A, maka $f^{-1} : B \rightarrow A$ merupakan suatu fungsi juga dan disebut fungsi invers dari f.

Catatan : fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x$, $\forall\, x \in A$ disebut fungsi identitas, dinotasikan dengan $i_d(A)$.

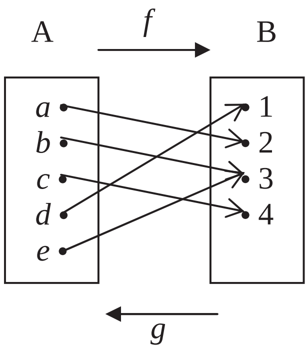
Definisi 6.7.

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow A$ adalah fungsi. g disebut fungsi invers dari f, dinotasikan dengan $g = f^{-1}$, jika $g(f(x)) = x$, $\forall\, x \in A$.

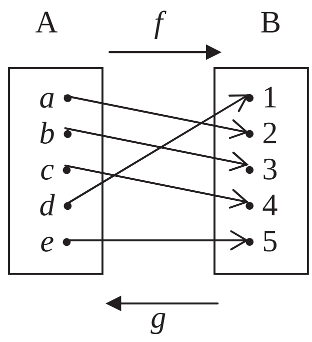
Dengan kata lain, g adalah fungsi invers dari f jika dan hanya jika $g \circ f = i_d(A)$.

Contoh 6.7.

Misalkan fungsi *f* dan *g* diberikan oleh diagram berikut :



(i)



(ii)

Apakah fungsi *f* punya invers?

Jawab :

a. Kasus (i), f tidak punya invers sebab $g \circ f \neq I_d$ (A), sebab $f(b) = 3$ tetapi $g(3) = b$ dan $g(3) = e$.

b. Kasus (ii), f punya invers sebab $g \circ f = I_d$ (A), mengingat

$f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$, $f(e) = 5$ dan

$g(2) = a$, $g(3) = b$, $g(4) = c$, $g(1) = d$, $g(5) = e$

sehingga

$(g \circ f)\,(a) = a$, $(g \circ f)\,(b) = b$, $(g \circ f)\,(c) = c$, $(g \circ f)\,(d) = d$ dan $(g \circ f)\,(e) = e$

Dengan demikian, f untuk kasus ini punya invers yaitu $g = \mathrm{f}^{-1}$.

Contoh 6.8.

Apakah fungsi $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $h(x) = x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ punya invers?

Jawab :

Ya! (coba anda periksa!)

Latihan

1. Jika fungsi $f : [-2,2] \to \mathbb{Z}$ dengan
   (i) $f(x) = x^2$
   (ii) $f(x) = 2 - x^3$
   (iii) $f(x) = x^5$

   Diantara fungsi-fungsi di atas, manakah yang mempunyai invers? Buktikan jawan anda!
2. Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ masing-masing mempunyai invers $f^{-1} : B \to A$ dan $g^{-1} : C \to B$. Buktikan komposisi fungsi $(g \circ f) : A \to C$ mempunyai invers $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$.
3. Misalkan fungsi f : □→ □ dengan
   (i) $f(x) = x^3 + 2$
   (ii) $f(x) = 2 - 2x$

   adalah fungsi-fungsi 1-1 dan onto sehingga fungsi f mempunyai invers. Tentukan invers dari masing-masing fungsi tersebut!
4. Selidiki apakah fungsi-fungsi berikut mempunyai invers atau tidak, jika punya invers tentukan rumus fungsi inversnya.
   a. $f : \mathbb{Z} - \{5\} \to \mathbb{Q}$ dengan $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$
   b. $f : \mathbb{Z} - \{5\} \to \mathbb{Q}$ dengan $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$
5. Misalkan fungsi $f : [2, \infty) \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 2$.
   a. Apakah fungsi f punya invers?
   b. Jika ya, tentukan fungsi inversnya.

6.2 Kardinalitas

6.2.1. Himpunan Finit dan Infinit (Lanjutan)

Pada pembahasan sebelumnya, dua himpunan dikatakan ekivalen jika kedua himpunan tersebut memiliki jumlah anggota yang sama banyaknya. Definisi ini mudah dipahami, jika himpunan yang dibandingkan memiliki jumlah anggota yang tertentu banyaknya (finit). Sebaliknya untuk himpunan-himpunan yang anggota tidak berhingga (infinit), menunjukkan ekivalensi dua buah himpunan merupakan suatu hal yang sulit. Berkaitan dengan masalah ini, berikut akan didefinisikan ekivalensi dua himpunan secara umum.

Definisi 6.8.

Dua himpunan A dan B dikatakan ekivalen, $A \cong B$, jika terdapat fungsi $f : A \to B$ yang bijektif.

Contoh 6.8.

Misalkan $A = \{1, 3, 5, 6, \cdots\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$. Apakah $A \cong B$?

Catatan : Berdasarkan definisi 2.19, untuk mengetahui apakah $A \cong B$ maka kita harus mencari atau membuat suatu fungsi $f : A \to B$ yang sifatnya bijektif. Artinya, kita mencari suatu aturan pengaitan 1-1 dan onto yang mengaitkan setiap anggota A dengan anggota B. Aturan ini mungkin lebih dari satu, tetapi kita cukup mencari atau membuat salat satu saja.

Jawab :

Buat pengaitan yang menghubungkan setiap anggota A dengan B sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
1 &\mapsto 2,\\
3 &\mapsto 4,\\
5 &\mapsto 6\\
&\vdots\\
n &\mapsto n + 1
\end{aligned}
$$

Pengaitan ini memberikan fungsi $f : A \to B$ dengan definisi

$$f(n) = n + 1, \ \forall\, n \in A$$

Jelas bahwa fungsi $f : A \to B$ merupakan fungsi bijektif (coba anda buktikan !)

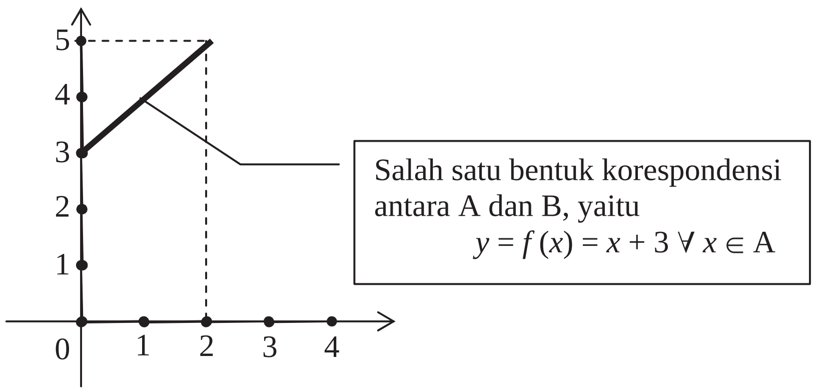
Dengan demikian, $A \cong B$ ■

Contoh 6.9.

Buktikan bahwa $A \cong B$, jika $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\}$ dan $B = \{ y \in \mathbb{R} \mid 3 \le y \le 5\}$!

Jawab :

Sebagai ilustrasi masalah di atas dapat kita gambarkan dalam bentuk diagram kartesius sebagai berikut :



Berdasarkan ilustrasi di atas, salah satu aturan yang mengaitkan antara A dan B adalah $f : A \rightarrow B$ dengan $f(x) = x + 3, \forall\, x \in A$.

Selanjutnya, kita buktikan bahwa $f : A \rightarrow B$ dengan $f(x) = x + 3, \forall\, x \in A$ adalah bijektif.

a. f fungsi 1-1,

Misalkan $a, b \in A$ dan $f(a) = f(b)$. Akibatnya,

$f(a) = f(b) \leftrightarrow a + 3 = b + 3 \leftrightarrow a = b$

Jadi, f fungsi 1-1

b. f fungsi onto,

Misalkan $b \in B$ sebarang. Pilih $a = b - 3 \in A$ sehingga

$f(a) = f(b - 3) = b - 3 + 3 = b$

Jadi, f fungsi onto.

Jadi, $f : A \rightarrow B$ fungsi bijektif.

Dengan demikian, terbukti bahwa $A \cong B$ ■

Definisi 6.8.

Suatu himpunan A dikatakan infinit, jika himpunan A ekivalen dengan himpunan bagian sejati dari dirinya sendiri, atau A infinit jika dan hanya jika $A \cong B$ dan $B \subset A$.

Secara intuitif, suatu himpunan dikatakan finit jika himpunan itu mempunyai anggota yang banyaknya tertentu, dalam hal ini anggota yang satu dengan yang lain berbeda. Dengan kata lain, jika kita membilang banyak anggota-anggotanya (anggota yang berbeda tersebut) maka proses membilang tersebut dapat berhenti. Jika tidak demikian, maka himpunan itu disebut infinit.

6.2.2. Himpunan Denumerabel

Definisi 6.9.

Himpunan B dikatakan <u>denumerabel</u> (terhitung) , jika $B \cong \mathbb{N}$. Himpunan yang tidak memenuhi syarat ini disebut himpunan <u>nondenumerabel.</u>

Contoh 6.10.

Misalkan $K = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots, 2n\text{-}1, \cdots\}$;

$L = \{(1,1), (2,4), (3,9), \cdots, (n,n^2), \cdots\}$

$M = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \cdots, 1/(2^{n-1}), \cdots\}$

Apakah himpunan K, L dan M termasuk himpunan denumerabel?

Jawab :

Terhadap masing-masing himpunan K, L dan M dapat dibuat fungsi *f*, *g* dan *h* sehingga

$f : K \to \mathbb{N}$ dengan $f(n) = 2n - 1, \forall n \in K$;

$g : L \to \mathbb{N}$ dengan $g(n) = (n, n^2), \forall n \in L$;

$h : M \to \mathbb{N}$ dengan $h(n) = 1/(2^{n-1}), \forall n \in M$

Masing-masing pengaitan di atas, dapat mendefinisikan fungsi 1-1 dan onto. Dengan demikian, K, L dan M merupakan himpunan denumerabel.

Beberapa sifat yang dimiliki oleh himpunan denumerabel adalah sebagai berikut :

1. Setiap himpunan infinit mempunyai subset yang denumerabel
2. Subset dari himpunan denumerabel adalah himpunan finit atau denumerabel
3. Jika $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ adalah himpunan denumerabel maka

   $P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan denumerabel pula.

Bagaimana dengan $Q = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, Apakah termasuk himpunan denumerabel?

6.2.3. Himpunan Countabel

Definisi 6.9.

Himpunan C dikatakan <u>countabel</u> (terbilang), jika C finit atau denumerabel. Sebaliknya disebut uncountabel, jika infinit atau nondenumerabel.

Catatan :

1. Subset dari himpunan countabel merupakan himpunan contabel
2. Jika $A_{1,} A_2, A_3, \cdots, A_n$ adalah himpunan countabel maka

   $P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan countabel juga.

   Bagaimana dengan $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, Apakah termasuk himpunan countabel?

Latihan

1. Misalkan C_1 dan C_2 adalah lingkaran sedemikian hingga $C_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 3\}$ dan $C_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$. Dengan menggunakan ilustrasi secara geometris, tunjukkan bahwa $C_1 \cong C_2$.
2. Buktikan bahwa himpunan bilangan cacah ekivalen dengan $\mathbb{Z}$ sehingga himpunan bilangan cacah merupakan himpunan infinit.
3. Buktikan bahwa $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$ sehingga $\mathbb{A}$ merupakan himpunan infinit.
4. Apakah himpunan semua bulu kuda yang ada disuatu kota termasuk himpunan finit atau infinit? jelaskan jawabanmu!
5. Buktikan bahwa
   a. himpunan bagian dari suatu himpunan denumerabel adalah finit atau denumerabel.
   b. interval $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ merupakan himpunan non denumerabel
6. Buktikan bahwa setiap himpunan infinit mempunyai subset yang denumerabel
7. Buktikan, jika $A_{1,} A_2, A_3, \cdots, A_n$ adalah himpunan denumerabel maka

   $P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan denumerabel pula.

Bagaimana dengan $Q = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, Apakah termasuk himpunan denumerabel?

8. Buktikan bahwa subset dari himpunan countabel merupakan himpunan contabel
9. Buktikan, jika $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ adalah himpunan countabel maka

   $P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan countabel juga.

   Bagaimana dengan $Q = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, Apakah termasuk himpunan countabel?
10. Buktikan jika A dan B himpunan denumerabel maka $A \times B$ adalah himpunan denumerabel.

DAFTAR BACAAN

1. Aliatiningtyas, Nur. dkk, 2002, Matematika Dasar, Bahan kuliah Jurusan Matematika FMIPA IPB, Bogor.
2. Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert, 1994, Introduction to Real Analysis, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc., Singapore.
3. Düntsch, Ivo dan Günther Gediga, 2000, *Sets, Relations, Functions*, Methodos Publisher, United Kingdom.
4. Magnus, P. D., 2005, *An Introduction to Formal Logic*, University at Albany, State University of New York fecundity.com/logic, version 1.1 [051126]
5. Norman, L. Bigg, 1998, Discrete Mathematics. John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
6. Nasution, Andi Hakim, 1980, Landasan Matematika, Bhratara, Jakarta.
7. Purcell, E.J dan D. Varberg, 1995, Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid I, Terjemahan I Nyoman Susila dan Bana Kartasasmita, Erlangga, Jakarta.
8. Seputro, Theresia M. H. Tirta, 1989, Pengantar Dasar Matematika : Logika dan Teori Himpunan, Depdikbud Dirjen Pendidikan Tinggi, Proyek Pengembangan LPTK, Jakarta.
9. Simpson, Stephen G., 2006, *Foundations of Mathematics*, Department of Mathematics The Pennsylvania State University, University Park, State College PA 16802.
10. Solov, D, 1982, *How to Read and Do Proof : An Introduction to Mathematical Thought Process*, Wiley, New York.
11. Stephan, Frank, 2006, *Set Theory*, Internet edition, Departments of Mathematics and Computer Science National University of Singapore, Singapore.
12. Walicki, Michal, 2006, *Introduction to Logic*, Internet Edition.